

L. M. Bristle

1870



ELEMENTI
MECCANICA ED IDRAULICA

DEL
PROF. TOMMASO MAZZANI

CANONICO DI S. GIOVANNI IN LATERANO
MEMBRO DEL COLLEGIO FILOSOFICO
ECC. ECC. ECC.

Volume I.



ROMA
TIPOGRAFIA DELLE BELLE ARTI
1863

P R E F A Z I O N E

Quando nella mia scuola dell'Università Romana introdussi i miei elementi di Meccanica ed Idranlica invece dei pregiatissimi del Professore Giuseppe Venturoli mi penso aver incorso la taccia di sfacciatato presuntuoso.

A purgarmi da questa addurrò i motivi che mi hanno stimolato a cotal sostituzione, e come nella compilazione dei detti Elementi mi sia diportato relativamente a quelli del celebre Autore. Primamente dopo la non recente pubblicazione di questi la Matematica avendo progredito in nuove maniere di dimostrazione dei Teoremi e nel modo di calcolare, era necessario far risentir ciò alla scienza Meccanica ed Idranlica. Inoltre voleva dare una unità alla Teoria delle

forze e dell'equilibrio, ed a ciò ho provveduto colla teoria delle Coppie e delle velocità virtuali. Mi era poi a cuore* l'agevolare agli Architetti la cognizione delle verità per loro interessanti, il che ho ottenuto spingendo le teorie quanto si può in avanti senza bisogno di calcolo differenziale.

Riguardo poi agli Elementi del Venturoli ho portato di peso anche con le stesse parole nel corpo de' miei le teorie che sono esclusive a quei pregiati Elementi che riguardano l'Architettura Meccanica. Da ciò risulterà tutto al contrario di che si sia potuto pensare intorno alla mia sostituzione perchè vi ho conservato il più bello dell'opera che ha ceduto il posto.

ELEMENTI DI MECCANICA

PROEMIO

1. Natura della inerzia. Quantunque il moto sia così comune a tutti i corpi del nostro globo, che non se ne possa trovare la minima particella in quiete, pur v'è distinzione fra materia e moto, o conosciamo possibile poter essere i corpi in quiete assoluta, come poter essere capaci di avere, oltre il moto comune doppio pel doppio moto della terra, i due moti proprii progressivo e rotatorio. Quindi la materia o i corpi si considerano come indifferenti al moto, cosicchè se essi sono in quiete quanto è da se rimangono in questo stato, come anche da per se perseverano nel moto quando siano in questo stato. Questa indifferenza dei corpi si chiama *inerzia*, perciò l'inerzia è l'indifferenza de' corpi alla quiete ed al moto, o l'inattitudine che hanno di passare da se o per principio intrinseco dalla quiete al moto, e dal moto alla quiete. Da ciò si vede che l'~~inerzia~~ non è forza come da taluni si vuol stimare e chiamare.

2. Definizione della forza. I corpi colla indicata indifferenza passano senza apporre alcuna opposizione allo

stato opposto a quello in cui si trovano sia di quiete sia di moto, e ciò per una causa estrinseca che si chiama *forza*: quindi la forza, qualunque essa sia in sè, che ci è incognita, è la causa che fa passare i corpi dalla quiete al moto, e dal moto alla quiete.

3. Difficoltà contro la definizione dell'inerzia.

Ho detto che i corpi non oppongono alcuna resistenza alla forza, al che sembra contraria l'esperienza. Infatti se una forza agisce contro una massa un poco grande questa non si muove in sul primo agire della forza, e sembra reagire contro di essa. Col far però una riflessione un poco intrinseca si vede questo fenomeno provenir proprio dall'indifferenza o inerzia de' corpi; imperocchè per questa indifferenza, come tutta la massa deve essere determinata dalla forza ad una direzione, e ad una velocità, così vi debbono essere determinate tutte le molecole: anzi la massa non può prendere una direzione, ed una velocità se non in conseguenza che l'abbiano presa le sue molecole; quindi, onde la forza abbia il suo effetto a muovere il corpo, deve dividersi ugualmente nelle di lui uguali molecole: ma per questa ripartizione si richiede un tempo, quindi nel primo istante dell'azione della forza è conseguenza della inerzia che il corpo non si muova: ed è questa l'apparente resistenza, che proviene piuttosto dall'impenetrabilità del corpo in quel principio immobile, che dal suo posto esclude altro corpo.

4. **Definizione più semplice della forza.** Quantunque la forza si sia definita la causa della quiete, e del moto, per si può definire semplicemente la causa del moto: perchè anche quando porta i corpi dal moto alla quiete, è causa di ~~quello~~ poichè non la può produrre che causando un moto eguale e contrario all'attuale de' corpi.

5. **Tempo in cui s'intende agire la forza.** Quando si dice forza o causa del moto, si dice il meno che si

richiegga per produrre il moto, ed a ciò basta un impulso istantaneo: quindi la forza *s'intende sempre agire in un istante*, e se agisce continuamente, come suol essere nella natura, s'intende questo continuo agire della forza come *una continuata serie d'impulsi istantanei*, o di forze.

6. Definizione del moto. Fin qui dell'inerzia de' corpi e delle forze; ora è a dirsi del moto.

Non brigandoci della natura ontologica del moto, ne daremo la definizione che serva alla meccanica.

Il moto è la coesistenza in atto, o in fatto dello spazio percorso da un mobile, del tempo che esso v'impiega, e della velocità colla quale lo percorre; infatti altri elementi non si trovano nel moto, ed ogni moto da questi soli risulta.

7. Spazio nel moto. Lo spazio nel moto *è la linea retta o curva che il mobile descrive*, e da questo si caratterizza il moto rettilineo, o curvilineo.

8. Tempo. Il tempo, lasciando la sua realtà psicologica, è la *successione regolare de' fenomeni*, perchè questa successione, alla maniera degli oggetti per la mente, produce il real tempo, che è un ente assolutamente mentale. Così il tempo si misura dal moto regolare degli astri, per esempio dal numero delle uguali porzioni di archi circolari descritti dalle stelle, o dall'indice di un orologio, archi che in questo si chiamano ore, quarti, e minuti ec. Da ciò si vede che anche il tempo si può avere in linea.

9. Velocità. La velocità nella sua natura è un ente mentale, ed è un giudizio fatto dalla mente nel paragonare due spazii percorsi nello stesso tempo. Così se mi si dice, che di due corpi in moto, l'uno in un ora percorre tre miglia, e l'altro dodici, all'istante formo il giudizio, essere la velocità del secondo quadruplo di quella del primo. Da ciò si vede che a formare giudizio di velocità basta presentare alla mente spazii percorsi nello stesso tempo, perchè facendone essa il quoto forma subito il giudizio della velocità dei mobili:

quindi in calcolo per velocità s'intende *lo spazio percorso dal mobile in un determinato tempo, che si prende per unità.*

10. Da tutto ciò si vede che i tre elementi costituenti il moto sono sempre spazii o linee.

11. **Costituenti della forza** Sono da considerarsi tre elementi nella forza: la sua natura, la sua direzione e la sua intensità. La *natura* della forza è sempre rettilinea, perchè la forza essendo un impulso istantaneo, (§ 5) in un istante non può avere che una sola direzione o essere un impulso rettilineo. La *direzione* della forza è la direzione per la quale tende a spingere il mobile, o è un *determinato collocamento nello spazio della retta per la quale spinge il mobile*. L'*intensità* della forza è la velocità che comunica al mobile, o è (§ 9) *la lunghezza di una retta che tende a fargli percorrere in un dato tempo.*

12. **Rappresentanza della forza.** Da ciò si vede che la forza si può rappresentare per una retta di data grandezza, e di data posizione nello spazio. Infatti dalla natura della retta è rappresentata la natura rettilinea della forza; dalla determinata posizione della retta nello spazio è espressa la direzione della forza; e dalla lunghezza della retta è valutata la sua intensità.

Quando dunque si dice che la forza AB è espressa dalla retta AB, ciò indica che la forza è applicata al punto A, che agisce da A in B o che spinge il mobile da A verso B per la retta AB, e che in un determinato tempo da stabilirsi dal meccanico tende a fargli percorrere la retta AB.

13. **Le rette rappresentanti le forze possono variare in un costante rapporto.** Da ciò si vede che le lunghezze delle rette esprimenti le intensità delle forze non sono assolute, ma possono variare a piacere solo conservando fra di loro un determinato rapporto. Infatti essendo queste lunghezze spazii percorsi in un dato tempo fissato dal meccanico, potendosi far questo multiplo o sommultiplo,

della stessa molteplicità, e summultiplicità saranno le rette in proposito, per lo chè varieranno a piacere, ma sempre in una ragione fissa.

14. Rappresentanza geometrica e di calcolo delle forze. Per total modo le forze sono espresse in quantità geometriche sì nella loro intensità, che nella loro direzione. L'intensità delle forze sono le lunghezze delle rette e questo esprimono gli spazii che le forze tendono a far percorrere al mobile in una unità di tempo. Le direzioni sono espresse dagli angoli che queste rette fanno con tre, o con due assi secondo che la retta è nello spazio o in un piano dato. Da ciò si vede che l'intensità e la direzione delle forze si possono rappresentare per mezzo della geometria. Ma si possono ancora esprimere in calcolo. Imperciocchè se la retta rappresentante una forza si prende per unità, e le rette rappresentanti altre forze si valutano in questa unità, queste diventano numeri. Gli angoli poi, che come testè abbiamo veduto rappresentano le direzioni delle forze, qualora sieno dati in linee trigonometriche, insieme colle direzioni delle forze, sono dati in valore.

Come la natura rettilinea della forza è rappresentata dalla linea retta, così l'equazione della retta rappresenterà in calcolo la detta natura della forza; ed ecco come colla geometria si può rappresentare la natura, l'intensità, e la direzione della forza; e come questi tre elementi si possono dare in quantità, e perciò calcolare.

15. Corpi a cui sono applicate le forze. Le forze sono applicate ai corpi: ora questi si distinguono anche nella meccanica in solidi, e liquidi. Il solido di meccanica è un aggregato di molecole così collegate che non possono essere spostate dalle forze che attualmente sono al corpo applicate.

Liquido in meccanica è un aggregato di molecole le quali sebbene abbiano qualche forza di adesione o coesione fra loro,

questa si considera nulla relativamente alle forze che ad esse s'intendono applicate. Fra i liquidi vi sono di quelli che all'azione delle forze cambiano densità o volume, e quelli che non la cambiano; i primi si chiamano fluidi compressibili, gli altri incompressibili. Se quelli cedendo all'azione e perciò raddensandosi, e cambiando di figura, tendono a ristabilirsi nella disposizione antecedente delle molecole, si dicono fluidi elastici.

16. Sistemi delle forze. L'insieme delle forze applicate alle molecole d'un corpo sia liquido, o solido, si dice sistema delle forze: quindi un sistema di forze è l'insieme delle forze applicate ai punti in qualche maniera collegati di un solido, o fra loro slegati come in una data massa fluida.

17. Equilibrio. Il moto è sempre prodotto dalla forza o dalle forze. Non ne viene però in conseguenza che nei corpi in quiete non agiscano forze, perchè è chiaro poter avvenire, che queste per le loro intensità e direzioni si distruggano. Questo stato in cui le forze applicate ad un corpo si distruggono si dice equilibrio delle forze: quindi l'equilibrio delle forze è lo stato in cui esse non producono l'effetto, che è il moto.

18. Scopo della meccanica. Il moto altre volte è utile ed altre è dannoso; per esempio il moto del pendolo è utile ad indicarci il tempo, il moto delle fabbriche è pernicioso. L'esistenza e la regolarità del moto utile è del più vasto interesse: ed è ancora assai interessante aver principii e metodi per impedire il moto pernicioso, ossia affinchè le forze sieno in equilibrio nei corpi che non si debbono muovere. La scienza che ha questo doppio oggetto dicesi Meccanica, quindi la meccanica è la scienza del moto per impedirlo, o per produrlo e regolarlo.

19. Dei costituenti del moto. Il moto (§ 6) è costituito, come da elementi, dallo spazio percorso, dal tempo

impiegato a percorrerlo, e dalla velocità colla quale si percorre; la causa poi assoluta del moto è la forza (§ 4), quindi la teoria del moto è tutta nella relazione di questi quattro elementi *forza*, *spazio*, *tempo* e *velocità*: perciò l'equazioni per dimostrarne le proprietà e per risolverne i problemi debbono essere equazioni fra le dette quattro quantità costituenti il moto, l'una, che è la forza come causa; e gli altri come elementi del moto. Ora si vede chiaro che queste equazioni non possono essere ne più ne meno di due, perchè delle dette quattro quantità due sone le indipendenti, e le altre due sono funzioni di queste. Infatti le quantità indipendenti sono lo spazio ed il tempo: poichè la velocità è (§ 9) lo spazio percorso in una unità di tempo, e la forza che in intensità è la velocità comunicata, come questa, è data in spazio e tempo

20. **Distinzione dei moti.** Il moto altro è progressivo ed altro rotatorio.

21. **Moto progressivo.** Il moto progressivo è quello nel quale i punti materiali del corpo son tutti mobili, e non se ne trova uno, che almeno istantaneamente non si muova. In questo moto tutti i punti materiali hanno la stessa velocità, e muovendosi in linee qualunque i loro elementi infinitesimi o le linee rette infinitesime percorse sono parallele. La velocità poi di tutto il corpo è la velocità di ciascuno dei suoi punti materiali.

22. **Moto rotatorio.** Il moto rotatorio ha luogo quando nel corpo vi sia almeno un punto istantaneamente immobile. Per avere la rotazione possono essere immobili anche due, e un numero qualunque di punti ma in linea retta. Nel caso di due punti immobili si ha la rotazione intorno ad un asse.

Se si abbiano soli tre punti immobili non in linea retta non si ha rotazione, perchè congiunti i tre punti con tre rette a formare un triangolo, la velocità intorno a cia-

scuna di queste tre rette è impedita dalla immobilità del vertice del triangolo opposto al lato in proposito. Alle volte il punto o asse di rotazione è assolutamente immobile cioè è immobile e relativamente allo spazio, e relativamente agli altri punti del corpo; e v'ha quando è immobile solo relativamente ai punti del sistema, e mobile riguardo ai punti dello spazio. Per esempio l'asse della terra è mobile riguardo ai punti dello spazio, ed è immobile relativamente agli altri punti terrestri. In questo caso si ha nel corpo il moto rotatorio intorno al punto o all'asse, ed il moto progressivo di tutti i punti del sistema rispetto lo spazio relativamente al quale sono immobili.

Nel caso del punto o asse assolutamente immobile si ha il solo moto rotatorio.

23. **Partizione della meccanica.** Dopo ciò divideremo la meccanica in tre parti, in *Dinamica*, in *Statica*, ed in *Cinamica*. Poiché le forze sono le cause e le direttrici del moto, e sono quelle che debbono avere nullo l'effetto nell'equilibrio, è necessaria la prima parte che tratti di esse in genere, e questa parte l'abbiam chiamata *Dinamica*, che indica il trattato delle forze. Viene in seguito l'altra parte che tratta delle condizioni onde le forze siano in equilibrio e questa è detta *Statica* da stare o essere fermo. Finalmente la terza parte deve trattare dell'effetto delle forze o del moto, e questa si è detta *Cinamica* dal verbo greco che vuol dire muovere.

PARTE PRIMA

DINAMICA

CAPO I.

*Composizione e decomposizione delle forze
applicate ad un punto.*

1. Risultante e componenti. Si supponga un numero qualunque di forze di qualunque intensità e direzione che siano applicate ad un punto: poichè esse sono simultanee ed istantanee in quest'istante non potranno spingere il punto che per una determinata direzione, cioè per una retta, e comunicargli una determinata velocità, quindi il punto è nello stesso stato che se fosse spinto da una sola forza che lo muovesse per quella determinata direzione, e gli comunicasse quella velocità. Questa forza ideale di un reale effetto si chiama *forza risultante*, o *risultante*, e le forze applicate si dicono le sue *componenti*: dunque *risultante di più forze applicate ad un punto è quella che si suppone produrre l'effetto unico delle dette forze.*

2. Equilibrio delle forze applicate ad un punto. Nel caso che il sistema delle forze applicate ad un punto non produca l'effetto che è il moto o che siano in equili-

brio, la risultante è nulla: e viceversa se nulla è la risultante di date forze, queste sono in equilibrio.

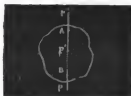
3. Assioma dell'equilibrio delle forze. Il caso dell'equilibrio, che è chiaro, e che si tiene per assioma è che *due forze uguali ed opposte secondo una retta applicate ad un punto sono in equilibrio; viceversa se due forze applicate ad un punto sono in equilibrio debbono essere uguali ed opposte secondo una retta.* Infatti se non fossero secondo una retta farebbero un angolo. In tal caso ciascuna delle due forze traendo il punto al disotto della retta direzione dell'altra, il punto anderà per una retta che taglia il detto angolo delle forze, perchè i soli punti di questo angolo sono al di sotto delle rette direzioni delle due forze.

4. Casi nei quali si conosce la risultante delle forze applicate ad un punto. I casi in cui si conosce la risultante di più forze applicate ad un punto sono due 1° quando le forze sono dirette secondo una retta che si dicono *forze cospiranti*: 2° quando sono secondo una retta ma le une opposte alle altre. Infatti nel primo caso la risultante è uguale alla somma delle componenti, posta nella retta comune, ed agente pel loro verso. Ciò viene dalla idea della forza considerata come grandezza. Infatti qual è l'idea che uno si potrebbe formare d'una forza doppia tripla quadrupla ec. di un'altra se non col supporre che secondo la retta in cui questa agisce su d'un punto siano applicate una due, tre ec. forze uguali alla proposta ed agenti per lo stesso verso? Andando al secondo caso e considerando solo due forze P , e Q direttamente opposte, se Q è maggiore di P , si separi in Q una parte uguale a P , questa essendo uguale ed opposta alla detta P si eliderà con essa, e rimarrà la sola parte di Q , che è $Q - P$, cioè la differenza delle due forze. Se poi p , p' , p'' ec. siano le forze applicate ad un punto ed agenti in un senso secondo una retta, e q , q' , q'' ec. siano forze applicate allo stesso punto

dirette in senso opposto, e collocate sulla detta retta, le prime forze pel teorema antecedente equivalendo ad una forza unica P uguale alla loro somma, e le altre opposte equivalendo alla loro somma che esprimeremo per Q , la risultante sarà la differenza $Q-P$, cioè sarà la differenza fra la somma delle forze agenti in un senso, e la somma delle forze opposte.

5. Traslazione di una forza. Nei divisati casi ed in altri non è necessario che le forze siano applicate immediatamente ad un punto atabilito del sistema, perchè nella meccanica si ha come fondamentale il seguente teorema. *Una forza applicata ad un punto si può trasportare ovunque sulla stessa retta secondo la quale agisce, purchè mantenga la stessa direzione, ed invincibile collegamento col punto primitivo.*

Infatti se al punto B sia applicata la forza P s'immagini che prolungata la retta B in A al punto A siano applicate due forze AP' , AP'' opposte secondo la stessa retta $PBAP''$, ed uguali alla proposta BP , queste due forze annullandosi (§ 3) egli è avere



aggiunto un zero di forza alla proposta; ma le due forze P , P'' si annullano: dunque per la stessa ragione si possono togliere, ed in questo caso l'effetto di BP è prodotto da AP' .

6. Altra maniera d'enunciare il teorema della traslazione d'una forza. Si vede poi chiaro che il nostro teorema si può enunciare anche così. *L'effetto d'una forza in un sistema di punti invincibilmente collegati non si cambia se questa forza si trasporti dovunque sulla sua retta, purchè prosegua ad agire per lo stesso verso, e sia invincibilmente collegata al detto sistema.*

7. Direzione della risultante di due forze angolari uguali. Se due forze applicate ad angolo ad un punto siano uguali la direzione della risultante divide in mezzo l'angolo da esse fatto; perchè non v'è ragione onde la detta direzione si avvicini più all'una che all'altra.

8. Si ricava la risultante in un numero qualunque di forze in equilibrio applicate ad un punto. Se un sistema qualunque di forze P, Q, R, S ec. siano in equilibrio, una qualunque di queste è uguale e direttamente contraria alla risultante delle altre: per es. la P è direttamente opposta alla risultante delle Q, R, S ec. Infatti la P in equilibrio colle Q, R, S ec. distrugge il loro effetto, ossia distrugge la forza di questo effetto che è la risultante. Ora due forze (§ 3) applicate ad un punto non possono distruggersi se non essendo uguali e direttamente opposte, dunque la P è uguale e direttamente opposta alla risultante delle altre colle quali è in equilibrio.

9. Si trova la risultante di due forze applicate ad un punto. Siano al punto A applicate due forze tali,



che se l'una agisse sola farebbe percorrere al punto la retta AB in un tempo t , e se l'altra fosse sola nello stesso tempo gli farebbe percorrere AC : dico che per l'impulso simultaneo delle due

forze nello stesso tempo t il punto percorrerà la diagonale AD del parallelogramma BC costruito sulle dette rette AB, AC .

Infatti poichè AC è parallela a BD , la forza che spinge il punto per AC non lo avvicinerà a BD , ne da questa l'allontanerà: ora un effetto della forza per AB è quello di menare il punto A nel tempo t sopra la BD ; non essendo essa ne favorita ne contrariata in questo ef-

fetto dalla forza che agisce secondo AC, ed il punto A dopo il tempo t dovrà trovarsi in un punto di BD prolungato se sia d'uopo, Ragionando allo stesso modo sulla forza per AC che tende a condurre il punto A nel tempo t sopra CD non punto modificata dall'altra che agisce secondo AB parallela alla retta CD, si ricaverà che il punto A nel tempo t dovrà trovarsi su di un punto di CD: dunque per l'azione simultanea delle due forze il punto A dopo il tempo t dovrà trovarsi e sopra BD, e sopra CD, dunque dovrà trovarsi nell'unico punto comune D. Ma per l'impulso simultaneo ed istantaneo delle due forze il punto A non può percorrere che una linea retta (din. § 1), dunque da A in D, nel tempo t , va per la retta AD, che è il teorema.

10. Le rette AB, AC esprimono le direzioni delle due forze; di più sono le due rette che le due forze tendono a far percorrere al punto nello stesso tempo t : dunque esprimono le velocità comunicate o le loro intensità; quindi rappresentano le due forze. La retta AD rappresenta l'effetto delle due forze, dunque rappresenta la loro risultante. Da ciò viene che se si prendano rette rappresentanti due forze che animano simultaneamente un punto e su questo si costruisca un parallelogrammo, la diagonale condotta dal detto punto rappresenterà la loro risultante.

Questo è il così detto *teorema del parallelogrammo delle forze*.

11. **Analisi della trovata risultante.** Si vede che in questo teorema sono sei gli elementi: le due componenti la risultante ed i tre angoli BAD, DAC, BAC che fanno fra loro. Ora questi sei elementi si trovano in ciascuno dei due triangoli DAB, DAC. Per esempio nel triangolo DAB i lati AB, BD, AD sono le intensità delle componenti e della risultante. Gli angoli BAD, BDA=DAC sono gli angoli fatti dalle componenti colla risultante, e l'angolo ABD è il supplemento dell'angolo CAB fatto dalle

due componenti. Da ciò si ricava, che se in un triangolo due lati AB , BD siano le intensità delle componenti, il terzo AD sarà l'intensità della risultante, e gli angoli ADB , BAD incontro ai lati AB e BD sono gli angoli che le componenti fanno colla risultante, e l'angolo B incontro alla risultante è il supplemento dell'angolo fatto dalle due componenti. Da ciò viene che il teorema del parallelogrammo delle forze s'identifica col triangolo, bastando dir due lati componenti, il terzo risultante, l'angolo incontro a questo il supplemento dell'angolo fatto dalle componenti, e gli altri due angoli quelli fatti dalle componenti colla risultante.

Ora in matematica abbiamo due trattati sul triangolo, uno geometrico e l'altro trigonometrico. Il geometrico dà le proprietà del triangolo e risolve problemi di costruzione dei triangoli. Il trigonometrico lega con equazioni i valori degli elementi del triangolo. Se dunque in questi due trattati si convertano i lati in forze e gli angoli in angoli fatti da queste forze, come si è detto, avremo le relazioni, algebriche degli elementi del teorema del parallelogrammo delle forze. Colle costruzioni de' triangoli, dati in linee alcuni elementi del detto teorema, potremo trovare gli altri; ed avremo l'equazioni fra i detti elementi per trovare colla loro soluzione i valori di alcuni di essi cogniti gli altri.

12. Proprietà geometriche del triangolo trasportato nel parallelogrammo delle forze. Riguardo alle proprietà geometriche del triangolo sappiamo che questo è dato quando sono dati tre dei suoi sei elementi tra i quali esista almeno un lato. Di qui dedurremo che quando *dei sei elementi del parallelogrammo delle forze ne son dati tre, tra i quali vi sia almeno una forza, si possono trovare gli altri tre.* In questa specie di problemi se tra gli elementi incogniti v'è la risultante si dice composizione di forze, se poi tra le quantità incognite vi sia una componente, si dice decomposizione di forze. Da ciò si vede

con quanta facilità si possano proporre problemi per la composizione e decomposizione delle forze, e quando gli elementi cognitivi siano dati in rette, come colle costruzioni della geometria si possono trovare in rette gli elementi incogniti.

13. Si enunciano problemi sul parallelogrammo delle forze relativi a quello del triangolo. Per esempio si diano le due componenti coll'angolo che fanno, e si voglia trovare la risultante, e gli angoli che fa colle componenti. Questo problema della composizione si riduce a quello dati in un triangolo due lati e l'angolo compreso trovare il resto. Data la risultante e gli angoli che fa colle due componenti trovare queste. Cotal problema di decomposizione si riduce a quello: dati in un triangolo un lato e i due angoli adiacenti trovare gli altri elementi. Date le componenti e la risultante trovare gli angoli che fanno fra loro. Qui è il caso di trovare i tre angoli, dati in un triangolo i tre lati. Poichè in fondo si vogliono gli angoli che le componenti debbono fare colla risultante questo è problema di decomposizione

14. Equazioni trigonometriche del parallelogrammo delle forze. Riguardo all'uso della trigonometria nel parallelogrammo delle forze diremo i casi più necessari. Sappiamo da questa parte di Algebra che il *il quadrato di un lato è uguale alla somma de' quadrati degli altri due meno due volte il prodotto degli stessi lati nel coseno dell'angolo fatto da questi*. Così nel caso nostro (Fig. pag. 12.) $AD^2 = AB^2 + BD^2 - 2AB \cdot BD \cdot \cos.ABD$. Se diciamo P, Q le componenti AB, AC, R la risultante AD, θ l'angolo CAB delle componenti, ed α, β gli angoli BAD, CAD fatti dalle componenti colla risultante, avvertendo essere $\cos.ABD = -\cos.BAC = -\cos.\theta$, avremo $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ\cos.\theta$; dunque *nel parallelogrammo delle forze il quadrato della risultante è uguale alla somma dei quadrati delle componenti più due volte il loro prodotto nel coseno dell'angolo che formano. Della tri-*

gonometria abbiamo ancora che in un triangolo un lato qualunque è come il seno dell'angolo opposto, ossia abbiamo

$$\frac{BD}{\text{sen.}BAD} = \frac{AB}{\text{sen.}ADB} = \frac{AD}{\text{sen.}ABD}$$

dunque nel nostro caso avremo

$$\frac{P}{\text{sen.}\beta} = \frac{Q}{\text{sen.}\alpha} = \frac{R}{\text{sen.}\theta}$$

che ci dà il teorema: *nel parallelogrammo delle forze una qualunque delle tre è come il seno dell'angolo fatto dalle altre due*: così il rapporto costante $\frac{R}{\text{sen.}\theta}$ ci dà che la risultante è come il seno dell'angolo fatto dalle due componenti.

14. **Componenti rettangolari.** Facciamo le due componenti un angolo retto avremo $\theta=90^\circ$, dunque il primo teorema ci darà $R^2=P^2+Q^2$; dal secondo teorema avremo

$$R = \frac{P}{\cos.\alpha} = \frac{Q}{\text{sen.}\alpha}$$

perchè $\text{sen.}\theta=1$ e $\text{sen.}\beta=\cos.\alpha$ e viceversa. Da queste abbiamo $P=R\cos.\alpha$ cioè nel caso che le componenti siano rettangolari una qualunque è uguale alla risultante nel coseno dell'angolo che fanno fra loro; e l'angolo che fa una componente rettangolare colla risultante è eguale alla componente divisa per la risultante.

15. **Tre forze applicate ad un punto non nello**



stesso piano. Siano le tre forze delle quali una qualunque non sia nel piano delle altre due, e queste sieno rappresentate dalle rette $HG=P$, $HC=Q$, $HE=R$: compito il parallelogrammo GC

sulle due P , Q la diagonale HD sarà la loro risultante, e

compito il parallelogrammo DE colla HD ed HE, la HB sarà la risultante delle tre proposte. Si vede chiaro che costruito un parallelepipedo colle tre rette HG, HC, HE, la HB sarà la diagonale di questa figura, quindi *allorché le tre forze non sono in un piano la loro risultante è la diagonale del parallelepipedo, che ha per tre spigoli non paralleli le tre dette forze.*

Se le tre forze siano ad angolo retto abbiamo

$$HB^2 = HG^2 + HC^2 + HE^2$$

e dicendo S la risultante sarà

$$S^2 = P^2 + Q^2 + R^2$$

cioè il quadrato della risultante di tre forze rettangolari è uguale alla somma dei quadrati delle tre componenti. Abbiamo poi nel triangolo rettangolo HBE, $HE = HB \cos EHB$, cioè una delle tre componenti è uguale alla risultante moltiplicata pel coseno dell'angolo che fanno fra di loro; ed il coseno dell'angolo fatto da una componente colla risultante è uguale alla componente divisa per la risultante: dunque se α, β, γ siano gli angoli fatti dalla risultante S colle tre componenti P, Q, R, avremo

$$P = S \cos \alpha, Q = S \cos \beta, R = S \cos \gamma$$

16. Risultante di un numero qualunque di forze applicate ad un punto. Sia ora ad un punto A appli-



cato un numero qualunque di forze di intensità e di direzione qualunque, e queste siano espresse dalle rette AB, AI, AG, AF. Sopra le due AB, ed AI si faccia il parallelogrammo BI e si conduca la diagonale AC, questa sarà la loro risultante. Con AC, ed AG si faccia il parallelogrammo CG e si con-

duca la diagonale AD, questa sarà la risultante delle tre AB, AI, AG. Finalmente con AD, ed AF si formi il parallelogrammo FD, la diagonale AE sarà la risultante delle forze proposte.

17. Poligono rappresentante le forze applicate ad un punto. Con un poco di riflessione si vede non essere necessario il formare tutti questi parallelogrammi. Infatti se fissata la forza AB dal suo estremo B si conduca la retta BC uguale e parallela all'altra forza AI, e da C si conduca CD uguale e parallela ad AG e da D si conduca DE uguale e parallela all'ultima forza AF, si sarà formato un poligono ABCDE aperto dalla parte di A ed E, che se si chiuda colla retta AE questa sarà la risultante di tutte le forze. Il poligono avuto col metodo antecedente non sarà in un piano se una sola delle forze non sia nello stesso piano colle altre.

Se nella costruzione antecedente riuscisse chiuso il poligono cosicchè il punto E si trovasse in A, la retta AE sarebbe nulla; perciò nulla la risultante, e quindi le forze proposte sarebbero in equilibrio: dunque l'equilibrio appartiene al caso del poligono formato dalle forze. Ed ecco come i poligoni rappresentano forze. Infatti s'immagini un poligono qualunque se considero tutti i lati come altrettante forze queste saranno forze applicate al vertice di un angolo qualunque del poligono e rappresentate da rette condotte rispettivamente parallele ed uguali ai lati del poligono, e queste in equilibrio fra loro; ovvero una di esse sarà la risultante delle altre.

18. Proprietà algebrica del poligono trasformato nelle forze applicate ad un punto. Sappiamo che in un poligono qualunque la somma delle proiezioni dei suoi lati sopra una data retta è eguale a zero, ossia che la somma dei lati del poligono moltiplicati rispettivamente per i coseni degli angoli che i lati formano con una data

retta, è uguale a zero: (*) dunque affinché le forze applicate ad un punto siano in equilibrio, la somma delle forze moltiplicate per i coseni degli angoli che esse fanno con una retta deve essere eguale a zero. Si ricava ancora che la risultante delle forze applicate ad un punto, moltiplicata pel coseno dell'angolo ch'essa fa con una retta è uguale alla somma delle componenti nei coseni degli angoli che le componenti fanno colla stessa retta. Ora sappiamo che una forza moltiplicata nel coseno dell'angolo che fa con una retta è una delle sue componenti rettangolari secondo questa retta; dunque nel caso dell'equilibrio delle forze applicate ad un punto la somma delle loro componenti secondo una retta deve essere eguale a zero; e la somma delle componenti delle forze date secondo una retta è uguale alla componente della loro risultante secondo la stessa retta. S'intende in questi due casi che le altre componenti sieno normali alla retta data.

(*) Sia la retta AB ed il poligono CDEFQH, e s'immagini un punto che partendo da H si muova per la direzione HCDEFQH fino a ritornare al punto H, donde partì, percorrendo i lati del poligono. Se si considerano le proiezioni di questi lati HC, CD ec. sopra AB è evidente, che il detto punto movendosi nel poligono si muoverà rela-



tivamente alla retta AB percorrendo le dette proiezioni. Finchè il punto si avvanzerà per esempio fino a D queste proiezioni potranno essere positive, ma quando da D piega per DE, EF sino in Q le proiezioni avendo direzione opposta alla prima saranno negative, e la proiezione di QH tornerà ad essere positiva: ma è evidente che pel partire e ritornare del punto fluente al punto H la somma degli avanzamenti, e delle retrocessioni parallele alla retta BH, ossia la somma delle proiezioni positive e negative dei lati del poligono sulla detta retta deve essere zero.

19. Calcolo della risultante delle forze applicate ad un punto. Si cerchi ora di risolvere il problema della composizione delle forze applicate ad un punto per mezzo del calcolo. Siano P', P'', P''' ec. le forze applicate, e per la forza P' siano α', β', γ' gli angoli che essa fa con tre assi ortogonali; e così $\alpha'', \beta'', \gamma''; \alpha''', \beta''', \gamma'''$ ec. sieno gli angoli analoghi per le altre forze P'', P''' ec. Si decompongano le forze secondo i tre assi ortogonali, la somma delle componenti secondo l'asse delle x sarà

$$P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + P''' \cos. \alpha''' \text{ ec.}$$

e le somme delle componenti secondo gli altri due assi delle y e delle z , saranno

$$P' \cos. \beta' + P'' \cos. \beta'' + P''' \cos. \beta''' \text{ ec.}$$

$$P' \cos. \gamma' + P'' \cos. \gamma'' + P''' \cos. \gamma''' \text{ ec.}$$

Esprimendo per X, Y, Z queste tre somme avremo

$$X = P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha'' + P''' \cos. \alpha''' + \text{ ec.}$$

$$Y = P' \cos. \beta' + P'' \cos. \beta'' + P''' \cos. \beta''' + \text{ ec.}$$

$$Z = P' \cos. \gamma' + P'' \cos. \gamma'' + P''' \cos. \gamma''' \text{ ec.}$$

Abbiamo ora tre componenti rettangolari X, Y, Z ; se dunque si dica R la loro risultante, e α, β, γ gli angoli ch'essa fa coi tre assi, o con queste tre forze rettangolari, avremo

$$R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2;$$

$$\cos. \alpha = \frac{X}{R}, \cos. \beta = \frac{Y}{R}, \cos. \gamma = \frac{Z}{R}$$

le quali quattro equazioni ci danno in calcolo l'intensità e la direzione della risultante.

Se si faccia la somma dei quadrati delle tre ultime equazioni troveremo

$$\cos.^2 \alpha + \cos.^2 \beta + \cos.^2 \gamma = 1,$$

cioè la somma dei quadrati dei coseni degli angoli che una retta fa con tre assi ortogonali, è uguale all'unità.

20. Teorema di geometria analitica ricavato dalla teoria delle forze. Supponiamo che le forze applicate al punto siano due, cioè P' , P'' , avremo le tre equazioni

$$X = P' \cos. \alpha' + P'' \cos. \alpha''$$

$$Y = P' \cos. \beta' + P'' \cos. \beta''$$

$$Z = P' \cos. \gamma' + P'' \cos. \gamma''$$

si faccia la somma dei quadrati di queste equazioni, ed avvertendo che

$$\cos.^2 \alpha' + \cos.^2 \beta' + \cos.^2 \gamma' = 1$$

$$\cos.^2 \alpha'' + \cos.^2 \beta'' + \cos.^2 \gamma'' = 1$$

sarà

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = P'^2 + P''^2 +$$

$$+ 2P'P''(\cos. \alpha' \cos. \alpha'' + \cos. \beta' \cos. \beta'' + \cos. \gamma' \cos. \gamma'') = R^2.$$

Se si dica θ l'angolo che formano le due P' , P'' abbiamo ancora (din. § 14)

$$R^2 = P'^2 + P''^2 + 2P'P'' \cos. \theta$$

uguagliando i due valori di R^2 troveremo

$$\cos. \theta = \cos. \alpha' \cos. \alpha'' + \cos. \beta' \cos. \beta'' + \cos. \gamma' \cos. \gamma'',$$

che ci dà il teorema di geometria analitica: *il coseno dell'angolo fatto da due rette nello spazio è uguale alla somma dei prodotti dei coseni degli angoli che le dette rette fanno rispettivamente con tre assi ortogonali.*

Se le due rette sono normali, $\cos. \theta = 0$, quindi la condizione affinché due rette siano normali è, che la somma dei prodotti dei coseni degli angoli che esse fanno rispettivamente coi tre assi sia zero.



21. Altra rappresentanza del valore della risultante di forze qualunque applicate ad un punto.

Si faccia ora la somma dei quadrati delle tre quantità X , Y , Z e dei loro valori dati in un numero qualunque di forze, e si esprimano con (P', P'') , (P', P''') , (P'', P''') gli angoli fatti delle forze che sono dentro le parentesi (din. §19): servendoci dei teoremi di geometria analitica dimostrati innanzi, troveremo

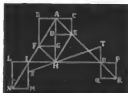
$$X^2 + Y^2 + Z^2 = R^2 = P'^2 + P''^2 + P'''^2 \text{ ec. } + 2P'P''\cos.(P', P'') \\ + 2P'P'''\cos.(P', P''') + 2P''P'''\cos.(P'', P''') \text{ ec.}$$

cioè il quadrato della risultante d'un numero qualunque di forze applicate ad un punto è uguale alla somma dei quadrati di queste forze più due volte i prodotti a due a due delle forze moltiplicati per li cosenì degli angoli che esse formano.

22. Dalla teoria delle forze si ricava il valore della diagonale del parallelepipedo. Se le forze proposte sono tre, il quadrato della risultante sarà uguale alla somma dei quadrati delle tre componenti più due volte la somma dei prodotti a due a due delle dette componenti nei cosenì degli angoli che esse formano. Ora si sa, che in questo caso la risultante è rappresentata dalla diagonale del parallelepipedo, di cui i tre spigoli non paralleli sono le tre forze date: quindi invece di servirci del valore dato dalla geometria della diagonale del parallelepipedo per trovare il valore della risultante di tre forze applicate ad un punto con angoli qualunque, piuttosto con metodo più facile dalle formole della composizione delle forze abbiamo trovato il valore della detta diagonale: quindi se sia d la diagonale ed a , b , c i tre spigoli di un parallelepipedo, abbiano per l'enunciato antecedente il valore della diagonale dalla equazione

$$d^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab\cos.(a, b) + 2ac\cos.(a, c) + 2bc\cos.(b, c)$$

23. Perdita delle forze quando due sono congiunte ad angolo. Essendo la risultante rappresentata da un lato del triangolo, e le componenti dagli altri due la risultante delle forze congiunte ad angolo è sempre minore della somma delle due componenti, che è la proprietà di un lato del triangolo rispetto gli altri due: dunque nelle forze congiunte ad angolo si deve perdere una parte di esse elisa dal contrasto. Dopo ciò troviamo queste parti perdute. Sia il parallelogrammo FE nel quale AF, AE, rappresentino



le due componenti, ed AH la risultante. Per il punto A si conduca BC normale ad AH, e dagli estremi F ed E si conducano le normali FB, FG; EC, ED. Essendo coincidenti i due triangoli

ADE, FGH, sarà $FG = DE$, $AD = GH$. Dalla prima uguaglianza risulta $AB = AC$ e dalla seconda $AH = AG + GH = AG + AD$. Nel rettangolo DC le AC, AD sono le componenti di AE, e nel rettangolo BG le BA, ed AG sono le componenti di AF. Ma AB ed AC sono eguali ed opposte; dunque si elideranno, e le componenti AD, ed AG dando AH, saranno le parti di AE ed AF che danno la loro risultante, mentre che AB ed AC danno le parti elise, ciò che si cercava.

CAPO II.

Forze parallele.

24. Risultante di due forze parallele. Dal (§ 23) si ricava il teorema della risultante di due forze parallele, senza artificio di aggiunta di forze come si suol fare. Perciò dal punto H si conduca LP normale ad AH: si prolunghino le direzioni AF, AE finchè s'incontrino in I ed O colla retta condotta, e le forze applicate in A s'in-

tendano applicate in I ed O secondo le stesse direzioni, e siano IN, OR. Si decompongano esse nelle IL, ed IM e nelle OP ed OQ: le LI ed OP secondo IO, e le IM ed OQ normali ad IO; ritorneranno le componenti delle forze proposte quando si trovavano in A; ma in A, AB ed AC erano eguali ed opposte, dunque IL ed OP sono eguali ed opposte, e perciò si elidono e si possono trascurare. Le due AD, ed AG sommate davano la risultante AH, delle quattro forze AC, AB, AD, AG, dunque la somma di IM ed OQ darà la risultante delle quattro IL, IM, OP, OQ, o delle due IM, OQ e questa nella direzione AH, ed applicata nel punto H normale ad IO, o parallela alle due IM, OQ. Se per H si conduca una retta ST a piacere che seghi in S, e T le direzioni IM ed OQ delle due forze parallele IM ed OQ e s'intendano in S, T applicate ad ST queste forze, saranno esse parallele sotto un angolo qualunque, e parimenti la loro risultante sarà eguale alla loro somma parallela ad essa ed applicata nel punto H. Quando sono applicate nei punti I ed O dai triangoli simili IHA, IMN abbiamo IM. IH = NM. AH, e dai triangoli simili AHO, OQR abbiamo OQ. HO = QR. HA. I secondi membri di queste eguaglianze sono eguali fra di loro perchè NM = QR, dunque IM. IH = OQ. HO. Ora per i triangoli simili ISH, HTO abbiamo

$$\frac{HS}{HT} = \frac{IM}{HO}, \text{ ma l'uguaglianza MI. IH} = \text{OQ. HO mi dà } \frac{OQ}{IM} = \frac{HS}{HT}, \text{ dunque } \frac{OQ}{IM} = \frac{HS}{HT}, \text{ o IM. HS} = \text{OQ. HT cioè}$$

la risultante di due forze parallele spezza la retta a cui esse sono applicate in parti inversamente proporzionali alle forze.

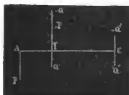
25. **Relazione delle due componenti e risultante parallele.** Esprimendo dunque le due forze per P, Q e per p, q le parti della retta l'una che termina a P e l'altra a Q, sarà $Pp = Qq$, Dicendo a la retta intera sarà

$q=a-p$, e sostituendo avremo $Pp=Qa-Qp$, $(P+Q)p=Qa$.

Se R sia la risultante, avremo $Rp=Qa$: da questa $\frac{R}{Q} = \frac{a}{p}$, e

dall'altra $Pp=Qq$ si ha $\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$. Dall'antecedente uguaglianza di quoti abbiamo che R è come a , cioè la risultante è come la retta che congiunge le componenti; e dalla seconda $\frac{P}{Q} = \frac{q}{p}$ abbiamo che P è come q , cioè la componente P è come la retta che congiunge la risultante coll'altra componente Q ; dunque riunendo ricaviamo, che nelle due componenti e risultante parallele una qualunque delle tre forze è come la retta che congiunge i punti d'applicazione delle altre due.

26. Risultante di due forze parallele opposte.



Siano le forze parallele P , Q' applicate alla retta AC : spezzata questa in I in parti AI , CI inversamente proporzionali alle forze P , Q' , s'intenda in I applicata una forza $P+Q'=R$

parallela alle due e diretta nel loro senso, questa sarà la loro risultante: dunque se in I oppostamente applico la forza R secondo IQ questa sarà in equilibrio con $P+Q'$ applicata in I , o con P , e Q' applicate in A e C , dunque le tre forze P , Q' , R sono in equilibrio. Ora una qualunque delle tre per esempio, Q' deve essere eguale ed opposta alla risultante delle altre due P , R (din. §8) dunque se al punto B applico $-Q'=Q'$ oppostamente alla stessa Q' , $-Q'$ sarà la risultante delle due forze opposte P , R . Ma $-Q'=Q'=R-P$, dunque la risultante di due forze opposte P , R è uguale alla loro differenza parallela ad esse, ed agente nel senso della più grande R , e al di là di questa.

È evidente poi che anche in questo caso una qualunque delle tre forze è come la retta che congiunge le altre due.

27. Centro delle forze parallele. Il punto d'applicazione della risultante delle forze parallele, siano nello stesso senso o in senso opposto, si dice centro delle forze parallele.

28. Caso in cui non esiste la risultante delle forze parallele. Sia P la forza parallela maggiore, e Q l'altra opposta: sia a la retta che le congiunge; sia p la retta fra il centro delle forze parallele ed il punto di applicazione di P ; e q la retta fra il detto centro ed il punto di applicazione di Q , avremo $(P - Q)p = Qa$, della quale

$$p = \frac{Qa}{P - Q}.$$

Da questa si vede che quanto meno differiranno fra loro le due forze parallele P , Q ed opposte, tanto più sarà lontano il centro delle stesse forze dai loro punti di applicazione, talchè se questa differenza fosse minore d'ogni assegnabile quella distanza sarebbe maggiore d'ogni assegnabile. Se poi questa differenza svanisca, o le due forze parallele ed opposte siano eguali il secondo membro di p presenterà il caso dell'assurdo, che si ha quando una quantità è divisa per zero: dunque quando le due forze parallele sono eguali ed opposte non esiste risultante. Ciò è evidente riflettendo che in questo caso essendo tutto eguale non vi è ragione perchè la risultante agisca nel senso e da una parte di una forza piuttosto che nel senso o dalla parte di un'altra.

29. Maniera algebrica e geometrica di trovare il centro di due forze parallele dirette o no per lo stesso verso. Sia che le due forze parallele sieno o no dirette nello stesso senso abbiamo, che una qualunque delle tre, componenti e risultante è come la retta congiungente i punti di applicazione delle altre due. Sieno P , e Q le forze parallele dirette nello stesso senso, R la risultante, e

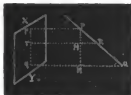
a la retta interposta fra i loro punti di applicazione di P, Q. Si dica x la distanza fra il punto d'applicazione di P ed il centro delle forze; pel teorema antecedente avremo la proporzione $R:Q::a:x$: qui se R, Q, ed a sieno date in rette, per avere la distanza x del centro delle forze dal punto d'applicazione di P, col noto teorema di geometria, si dovrà trovare la retta quarta proporzionale dopo le rette, risultante, componente Q, e la retta a congiungente le due componenti. Se poi le dette quantità sieno date in valori la $x = \frac{Qa}{R}$ ci darà il valore della retta domandata. Se

P, e Q siano opposte e $P > Q$ sussisterà la stessa proporzione antecedente avvertendo, che $R = P - Q$, e il valore o aritmetico, o geometrico di x si dovrà portare a sinistra di P supposto a sinistra di chi guarda la figura, onde applicare la risultante delle parte della forza maggiore (din. § 26).

30. Risultante d'un numero qualunque di forze parallele. Dopocì si può trovare la risultante di un numero di forze parallele P, P', P'', ec. Infatti si troverà la risultante delle due forze P, P' e nel centro si collocherà questa risultante $P \rightarrow P'$; si troverà la risultante di $P \rightarrow P'$ e di P'' e nel centro si collocherà questa risultante $P \rightarrow P' \rightarrow P''$, e così di seguito fino a comporre l'ultima forza. Se si trovassero delle forze parallele opposte, si troverebbe la risultante come nel secondo caso (din. § 26, § 29). Se le forze parallele sono tutte nello stesso senso, vi è sempre il centro di queste forze e in questo la risultante è uguale alla somma di tutte. Se poi vi sono forze opposte esiste pure il centro delle forze parallele quando la differenza fra le forze in un senso e le forze in senso opposto non sia zero, perchè allora nel centro si deve collocare la forza eguale a questa differenza. Se sia zero, trovando la risultante delle forze in un senso e la risultante delle forze opposte, avremo il caso di due forze eguali ed opposte in cui non

esiste la risultante. Ecco dunque un caso in cui non esiste la risultante di forze date. Ma v'è un altro caso ed è quello di due forze non nello stesso piano, come vedremo.

31. Metodo algebrico di trovare il centro delle forze parallele. Il cercare il centro delle forze parallele col metodo dato è lungo, e per ogni centro che si trova si ha una inesattezza: quindi è meglio di assegnare tre equazioni alla maniera della geometria analitica, che ci diano le sue tre coordinate rispetto tre piani. Perciò siano i



punti P, Q animati da due forze parallele P, P'. Congiunti questi punti colla retta P, Q si spezzi essa in R in parti PR, RQ inversamente proporzionali alle due forze. Dai tre punti P, R, Q si

conducano al piano X Y delle coordinate tre parallele Pp, Rr, Qq, che segneranno sul detto piano tre punti p, r, q in una retta pq: da P si conduca la PN parallela a pq. Si faccia $Pp=x$, $Qq=x'$, ed $Rr=X'$. Pel collocamento del centro R abbiamo le proporzioni

$$P': P+P'=PR: PQ=RM: NQ=X'-x: x'-x,$$

dalla quale abbiamo

$$P'x'-P'x=(P+P')X'-Px-P'x$$

ossia $(P+P')X'=Px+P'x'$. Da questa equazione si ricava, che la risultante di due forze parallele moltiplicata per la sua ordinata è uguale alla somma delle due componenti moltiplicate per le loro ordinate. In meccanica una forza moltiplicata per una retta si chiama il momento di questa forza. Una forza moltiplicata per l'ordinata rispetto un piano, un'asse, un punto si dice momento della forza rispetto quel piano, asse, e punto; ed il piano asse e punto si dicono piano asse e centro dei momenti: quindi il teorema antecedente

può anche enunciarsi così. *Il momento rispetto un piano della risultante di due forze parallele è uguale alla somma dei momenti delle due componenti rispetto lo stesso piano.*

Sia ora una terza forza P'' coll'ordinata x'' rispetto il piano già considerato. Sia X'' l'ordinata del centro delle due forze P'' , e $P \rightarrow P'$ risultante delle due prime, pel teorema antecedente, il momento della risultante cioè $(P \rightarrow P' \rightarrow P'')X''$ è uguale alla somma dei momenti delle due componenti P'' , $P \rightarrow P'$ cioè è uguale a $P''x'' \rightarrow (P \rightarrow P')X'$: ma invece di $(P \rightarrow P')X'$ possiamo porre $Px \rightarrow P'x'$ dunque

$$(P \rightarrow P' \rightarrow P'')X'' = Px \rightarrow P'x' \rightarrow P''x''.$$

Proseguendo così si vedrà in genere, che il momento della risultante d'un numero qualunque di forze parallele rispetto un piano è uguale alla somma dei momenti delle componenti rispetto lo stesso piano. Se si dica dunque X l'ordinata del centro delle forze parallele P , P' , P'' , P''' ec. avremo

$$(P \rightarrow P' \rightarrow P'' \rightarrow P''' \text{ ec.})X = Px \rightarrow P'x' \rightarrow P''x'' \rightarrow P'''x''' \text{ ec.}$$

ed

$$X = \frac{Px \rightarrow P'x' \rightarrow P''x'' \rightarrow P'''x''' \text{ ec.}}{P \rightarrow P' \rightarrow P'' \rightarrow P''' \text{ ec.}}$$

Questa si suol scrivere più brevemente

$$X = \frac{\sum Px}{\sum P}$$

dove il numeratore e denominatore esprimono le somme di quantità analoghe a Px , ed a P , che si hanno successivamente accentando le dette quantità Px , P . Dalla formola antecedente si ricava, che l'ordinata del centro d'un numero qualunque di forze parallele rispetto un piano è uguale alla somma dei momenti rispetto questo piano divisa per la somma delle forze. Se le ordinate del centro delle forze parallele

rispetto due altri piani siano Y, Z avremo

$$Y = \frac{\sum P y}{\sum P}, \quad Z = \frac{\sum P z}{\sum P}.$$

Così avremo le coordinate del centro delle forze parallele rispetto tre piani coordinati.

32. Punti d'applicazione delle forze parallele in un piano, o retta. Se i punti d'applicazione delle forze parallele siano in un piano il loro centro si troverà in questo piano. Perché se si suppone che queste sieno sia il piano delle x, y avremo zero tutte le z, z' ec. che sono distanze dei punti da questo piano: dunque si avrà $Z=0$, cioè il centro è su lo stesso piano. In tal caso per determinarlo bastano l'equazioni

$$X = \frac{\sum P x}{\sum P}, \quad Y = \frac{\sum P y}{\sum P},$$

che sono le coordinate rispetto gli assi della x, y , collocati nel detto piano, che si chiamano, come si è detto, assi dei momenti. Se poi tutti i punti d'applicazione delle forze siano sopra una retta, che si prenderà per asse delle x saranno zero le y, y' ec. e perciò $Y=0$: dunque sul detto asse delle x si troverà il centro delle forze, ed in questo caso la X ci darà la distanza del detto centro da un punto dato del detto asse, che si è chiamato centro dei momenti.

33. Centro delle forze nel piano asse e centro dei momenti. Se il piano, o asse, o centro dei momenti passa pel centro delle forze parallele, divenendo zero la sua distanza da queste figure geometriche, si avrà che la somma dei momenti rispetto il piano, asse, e centro che passa pel centro delle forze deve essere zero.

34. Momenti negativi. I momenti delle forze essendo il prodotto delle forze nelle ordinate dei loro punti d'ap-

plicazione si vede, che questi momenti diventano negativi o perchè le forze sieno opposte a quelle che si considerano come positive, o perchè le ordinate sono dalla parte del piano, o asse, o centro di momenti, opposta a quella dove si sono considerate positive. Quindi se un piano dei momenti passa a traverso del sistema l'ordinata del centro delle forze parallele rispetto questo piano sarà uguale alla differenza dei momenti, divisa per la somma delle forze. Se questa coordinata sarà positiva il centro dei momenti sarà dalla parte delle ordinate positive, e se sarà negativa sarà dalla parte opposta.

35. Forze parallele opposte. Se le forze parallele siano dirette in senso opposto, il denominatore delle coordinate del loro centro sarà la differenza delle forze. Perciò se questa differenza sarà zero, o la somma delle forze dirette in un senso sia uguale alla somma di quelle dirette in senso opposto, o finalmente se il sistema si riduce a due forze parallele uguali ed opposte, i denominatori delle coordinate del centro delle forze parallele saranno zero, e perciò queste coordinate saranno assurde: quindi il dato sistema di forze non avrà centro, come si sa d'altronde.

CAPO III.

Centro di gravità.

36. Espressione in calcolo e direzione della gravità. Tutti i punti materiali di ogni corpo sulla superficie della terra sono animati da una forza diretta al centro di questa, che si dice gravità, e questa forza è la stessa per i detti punti materiali, o per le masse della stessa grandezza, e quindi è proporzionale alle masse dei corpi.

Le gravità sono convergenti verso il centro della terra; ma a causa della piccolezza dei corpi, che si trattano in

in meccanica relativamente alla loro distanza dal detto centro, queste forze si possono considerare come parallele: quindi tutta la teoria delle forze parallele si applica alle gravità dei corpi.

37. Centro di gravità e maniera di determinarlo. Si è dimostrato in questa teoria (din. §30), che le forze parallele dirette nello stesso senso hanno sempre una risultante uguale alla loro somma da applicarsi in un determinato punto del sistema, che si chiama centro delle forze parallele: dunque un corpo animato dalle gravità ha sempre una risultante uguale alla somma di queste da applicarsi ad un dato punto che si chiamerà *centro delle gravità*, o *centro di gravità*.

Nella teoria delle forze (din. §31) parallele l'ordinata del centro delle forze parallele rispetto un piano, asse, o punto è uguale alla somma dei momenti delle forze, divisa per la somma delle forze stesse, quindi *l'ordinata del centro di gravità è uguale alla somma dei momenti delle gravità divisa per la somma delle gravità stesse*.

38. Peso dei corpi. L'effetto delle gravità nel corpo è il peso. Per peso comunemente s'intende lo sforzo che fa il corpo contro la forza che lo sostiene; ora lo sforzo che fa un corpo animato dalle gravità contro il sostegno è la loro risultante o la somma delle gravità: dunque in una massa qualunque il peso è la somma della gravità che animano i suoi punti materiali.

39. Come si valuta la gravità. La gravità è una forza che in se non si conosce, ma solo si conosce nell'effetto. Questo è doppio o dinamico, o di moto. L'effetto dinamico della gravità è lo sforzo contro il sostegno, ossia è il peso del corpo: quindi in meccanica *la gravità è rappresentata del peso di una massa assunta per unità misuratrice delle masse*. La gravità nel moto, come meglio si conoscerà nella cinemica, si manifesta dalla velocità comunicata al corpo in

una unità di tempo, o dallo spazio che fa percorrere al corpo uniformemente in una unità di tempo per un impulso istantaneo, che sia la somma degli impulsi, che difatti gli comunica nella caduta durante la detta unità di tempo.

Per ora riterremo l'effetto dinamico della gravità, che è il peso.

40. Equazioni per la determinazione del centro di gravità. Dopo ciò sia g la gravità, o il peso di una unità di massa. Siano m, m', m'' ec. le molecole cognite nelle quali decomponiamo una data massa M . Se queste siano infinitamente piccole si considereranno come punti materiali. Se saranno valutabili si considererà il loro centro di gravità nel quale si supporrà riunita la massa. Siano $x, y, z; x', y', z'$ ec. le ordinate delle dette molecole $m, m',$ ec. che se non siano infinitamente piccole queste coordinate saranno quelle dei loro centri di gravità. Dopo ciò saranno gm, gm' ec. i pesi delle dette molecole, e $gm x, gm' x'$ ec. saranno i momenti dei detti pesi rispetto il piano delle y, z : saranno $gmy, g'my'$ ec.: $gmz, gm'z'$ ec. i momenti rispetto i piani delle x, z , e delle x, y : perciò avremo per le coordinate del centro di gravità del sistema pesante l'equazioni (§37)

$$X = \frac{\sum gm x}{\sum gm}, Y = \frac{\sum gmy}{\sum gm}, Z = \frac{\sum gm z}{\sum gm}$$

ossia togliendo la g moltiplicatrice di tutti i termini di

$$X = \frac{\sum m x}{\sum m}, Y = \frac{\sum m y}{\sum m}, Z = \frac{\sum m z}{\sum m}.$$

Se il corpo è omogeneo, e si dica d la densità costante, e v, v' ec. i volumi delle singole molecole, in luogo di esse nelle formole antecedenti si potrà porre dv, dv' ec, e togliendo dai numeratori e denominatori il fattore comune d avremo

$$X = \frac{\sum vx}{\sum v}, Y = \frac{\sum vy}{\sum v}, Z = \frac{\sum vz}{\sum v}$$

Dai risultamenti antecedenti si vede, che le coordinate del centro di gravità non dipendono da questa forza, quindi sono formole per determinare il centro di forze qualunque parallele, ed uguali che investano i punti materiali di un corpo, cosicchè le forze totali delle diverse masse sono proporzionali alle masse stesse sulle quali agiscono.

41. Determinazione del centro di gravità dei corpi omogenei ridotto al caso delle figure geometriche.

Se il corpo è omogeneo invece dei pesi delle molecole si considerano le parti del volume totale: quindi il caso della determinazione del centro di gravità è ridotto al caso geometrico di considerare gli elementi del volume, o delle figure geometriche dei corpi, come forze proporzionali agli elementi stessi. Queste figure geometriche in ultimo si riducono a linee rette, a superficie triangolari, a prismi e piramidi.

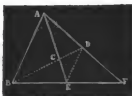
42. Centro di gravità della retta. Riguardo alla linea retta il suo centro di gravità si trova nel mezzo; perchè è il centro di gravità degli elementi uguali della detta retta presi a due a due ad uguali distanze dai suoi estremi.

43. Centro di gravità del rettangolo. Il centro di gravità di un rettangolo si trova nell'intersezione di due rette bisecanti i lati paralleli. Infatti ognuna delle dette rette passa per i punti medi o pel centro di gravità di tutte le rette parallele ai lati del rettangolo che bisecano: dunque passano pel centro di gravità del rettangolo: quindi questo centro si trova nella loro intersezione. Si vede poi chiaro che ciò equivale a dire, che il centro di gravità di un rettangolo si trova nel mezzo di una retta che biseca due dei suoi lati paralleli.

Col ragionamento antecedente si prova, che il centro di gravità di un parallelogrammo si trova nel mezzo della retta bisecante due dei suoi lati paralleli.

44. Centro di gravità del circolo, e del poligono regolare. Il centro di gravità del circolo e del poligono regolare sia del perimetro o della superficie è nel centro della figura; perchè questo centro si trova nel mezzo di tutte le rette condotte per esso alla periferia del circolo, o al perimetro del poligono.

45. Centro di gravità del triangolo. Sia da trovarsi il centro di gravità di un triangolo. Sia il triangolo



ABF; dal vertice A sulla metà del lato opposto BF si conduca la retta AE: come questa passa pel punto medio di EF così passerà per i punti medi di tutte le rette che tra AB,

ed AF si potranno condurre nel triangolo parallele alla BF: dunque la AE passerà per i centri di gravità delle dette rette, e perciò passerà pel centro di gravità del triangolo. Se ora dal punto B si conduca al mezzo del lato opposto AF la BD questa pure passerà pel centro di gravità del triangolo: dunque questo centro dovendosi trovare e sulla AE, e sulla BD si troverà nella loro intersezione C. Per conoscere la situazione di C sopra AE si conduca ED. Come DF è la metà di AF, così EF è la metà di BF, dunque la DE, che divide in parti proporzionali i lati AF, BF del triangolo sarà parallela al terzo, e perciò per i triangoli simili DFE, AFB dovrà essere DE la metà di AB come DF è metà di FA. Per lo stesso parallelismo di DE ad AB saranno simili i triangoli DEC, ACB, e perciò come DE è la metà di BA così EC sarà la metà di CA: dunque EC entra tre volte in AE ossia CE è la terza parte

di AE, ed AC sarà le due terze parti di AE: dunque il centro di gravità di un triangolo è ai due terzi della retta condotta dal vertice di un angolo alla metà del lato opposto; questi due terzi computati dal detto vertice.

46. Centro di gravità di tre pesi uguali applicati ai vertici di un triangolo. Se ai vertici A, B, F si applichino tre pesi uguali, il centro di gravità di questi pesi è il centro di gravità del triangolo, cioè è ai $\frac{2}{3}$ della retta che da un vertice va alla metà del lato opposto. Infatti il centro di gravità dei due pesi in B, ed F è nel punto medio E: dunque all'estremità della retta AE sono applicati due pesi che sono fra loro come 1 a 2, dunque se in C è il loro centro di gravità AC dovrà essere AC ad EC come 2 ad 1, cioè AC sarà doppia di EC, o AC sarà $\frac{2}{3}$ di AE.

47. Centro di gravità del trapezio. Dopo ciò determiniamo il centro di gravità di un trapezio. S'immagini questo trapezio coi lati paralleli in alto e in basso, e si suppongano prolungati fino all'incontro i lati non paralleli, avremo il gran triangolo colla base, che è la base inferiore del trapezio, ed il triangolo minore colla base, che è la base superiore dello stesso trapezio, ambedue dello stesso vertice. Se dunque da questo si conduca alla metà della base inferiore del trapezio una retta questa passerà per il punto medio della base superiore del trapezio stesso. Il piccolo triangolo ed il trapezio sono le parti del gran triangolo: ora i centri di gravità del piccolo, e del gran triangolo si trovano sulla retta bisegante le loro basi, dunque dovrà anche sulla stessa retta trovarsi il centro di gravità del trapezio, cioè sulla retta bisecante le due basi parallele. Si dica x la distanza del centro di gravità del trapezio dalla base inferiore, e siano A, a le altezze del grande e del pic-

colo triangolo. Essendo questi simili le loro aree saranno come i quadrati delle rette in essi similmente condotte, dunque saranno come i quadrati delle loro altezze: queste aree adunque si potranno esprimere per $m\Lambda^2$, ma^2 , ove m è la ragione costante fra l'area ed il quadrato dell'altezza. L'area poi del trapezio, differenza tra le aree dei due triangoli, sarà espressa da $m(\Lambda^2 - a^2)$. La distanza del centro

di gravità dell'area del gran triangolo dalla base è $\frac{\Lambda}{3}$: dunque il momento di quest'area rispetto la detta base sarà $m\Lambda^2 \cdot \frac{\Lambda}{3}$. La distanza del centro di gravità del piccolo trian-

golo dalla sua base è $\frac{a}{3}$: quindi per avere la sua distanza

dalla base inferiore del trapezio a questo $\frac{a}{3}$ si deve aggiungere l'altezza del trapezio che è $\Lambda - a$: dunque il momento dell'area del piccolo triangolo relativo alla base inferiore del trapezio è

$$ma^2 \left(\frac{a}{3} + \Lambda - a \right) = ma^2 \left(\Lambda - \frac{2}{3}a \right).$$

Il momento dell'area del trapezio rispetto la stessa base sarà $m(\Lambda^2 - a^2)x$: ma il momento dell'area del gran triangolo deve essere uguale alla somma dei momenti delle sue parti componenti, cioè alla somma dei momenti del piccolo triangolo e del trapezio: quindi avremo

$$\frac{m\Lambda^3}{3} = ma^2 \left(\Lambda - \frac{2a}{3} \right) + m \left(\Lambda^2 - a^2 \right) x$$

ossia

$$3(\Lambda^2 - a^2)x = \Lambda^3 - 3a^2\Lambda + 2a^3 = \Lambda^3 - a^2\Lambda - 2a^2\Lambda + 2a^3$$

$$= \Lambda(\Lambda^2 - a^2) - 2a^2(\Lambda - a) = (\Lambda - a)(\Lambda^2 + \Lambda a - 2a^2) =$$

$$(\Lambda - a)(\Lambda^2 - a^2 + \Lambda a - a^2) = (\Lambda - a)[(\Lambda - a)(\Lambda + a) + a(\Lambda - a)]$$

$$\text{d'onde} \quad (a) \quad 3(A^2 - a^2)x = (A - a)^2(A + 2a)$$

Si dica y la distanza del centro di gravità del trapezio della base superiore, avremo che $x + y$ ci darà l'altezza del trapezio $A - a$; dunque $x = A - a - y$, sostituendo questo valore di x nell'antecedente equazione avremo

$$(b) \quad 3(A^2 - a^2)y = (A - a)^2(a + 2A)$$

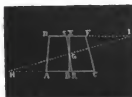
dividendo l'equazione (a) per la (b) avremo

$$x : y = A + 2a : a + 2A$$

Diremo B e b le basi dei due triangoli simili, o le basi del trapezio; dovendo essere queste basi come le altezze A , a , avremo ancora

$$x : y = B + 2b : b + 2B$$

si può di qui ricavare una costruzione semplicissima per avere il centro di gravità del trapezio. Infatti *prolungate verso la destra una delle due basi d'una lunghezza uguale all'altra, e prolungata questa verso la sinistra di lunghezza uguale altra base conducete una retta che congiunga gli estremi di questi prolungamenti, questa retta segnerà nel centro di gravità del trapezio la retta bisegante le due sue basi*



Infatti prolungate DF di $FI = AC = B$, ed AC di $AH = DF = b$, conducete HI , e dal centro di gravità G la normale BE alle due basi, e la bisecante SR avremo $GB : GE = GR : GS = HR : SI$, ossia

$$x : y = \frac{B}{2} + b : \frac{b}{2} + B = B + 2b : b + 2B$$

Dall'equazione (b) ricaviamo

$$(c) \quad y = \frac{1}{3} (A-a) \left(\frac{a+2A}{A+a} \right) = \frac{1}{3} (A-a) \left(\frac{b+2B}{B+b} \right)$$

ora nella figura antecedente, abbiamo $SG:SR=EG:EB$: se dunque si dica la retta bisecante R , ed $SG \ y'$, avremo che l'antecedente proporzione si cambia in $y':R=y:A-a$ quindi nella (c) invece di $\frac{y}{A-a}$ si potrà porre $\frac{y'}{R}$, e così

avremo $y' = \frac{R}{3} \left(\frac{b+2B}{B+b} \right)$, dove abbiamo la distanza del

centro di gravità del trapezio dal punto medio della sua base superiore data nella retta bisecante, e nelle due basi.

48. **Centro di gravità di un arco di circolo.** Sia da terminarsi il centro di gravità di un arco di circolo



EDF. Si conduca la corda EF, e compiuto il semicircolo ADC si conduca il raggio BD, che biseghi in D l'arco: è evidente che il centro di gravità del proposto arco si troverà in BD bisecante

tutte le corde parallele alla corda EF, onde basterà conoscere la sua distanza dal centro B. A questo fine si consideri l'elemento infinitesimo mn del proposto arco: potendosi questo supporre una lineola retta se dal suo punto medio o si condurrà al diametro AC parallelo ad EF la normale op , il momento di questo archetto rispetto il detto diametro sarà $mn \cdot op$. Dagli estremi m, n si conducano al diametro le normali ms, nt , da n la nt normale ad ms , ed il raggio Bo : i due triangoli simili mat, oBp ci danno $mn \cdot op = nt \cdot Bo$: dunque $nt \cdot Bo$ sarà il momento dell'archetto mn rispetto il diametro, e la somma di tutti gli $nt \cdot Bo$ appartenenti a tutto l'arco EDF sarà la somma dei momenti del proposto arco rispetto il diametro. Ora questa somma dei momenti deve

essere uguale al momento dell'arco riconcentrato nel centro di gravità G: dunque quella somma deve essere uguale ad EDF. BG, supponendo in G il centro di gravità. Ora nella somma di nt . Bo abbiamo costante il raggio Bo: dunque si deve prendere la somma degli nt per tutto l'arco EDF. Ma nt è la proiezione dell'elemento dell'arco mn sopra la corda EF: dunque la somma di quei momenti sarà la somma delle proiezioni degli elementi dell'arco EDF sopra EF moltiplicati per il raggio Bo: questa somma è la corda stessa EF: dunque avremo EDF. GB = Bo. EF, e $GB = \frac{BD \cdot EF}{EDF}$: cioè la distanza del centro di gravità di un arco di circolo dal suo centro è uguale al raggio moltiplicato per la corda e diviso per l'arco stesso.

49. Centro di gravità di mezza circonferenza. Se l'arco diventi mezza circonferenza la corda diventerà il doppio raggio e perciò la distanza del centro di gravità di mezza circonferenza dal suo centro è uguale al doppio del quadrato del raggio diviso per la semicirconferenza.

50. Centro di gravità di un settore. Si voglia ora il centro di gravità della superficie di un settore. Sia il settore



AGBC; il centro di gravità sarà nel raggio CG, che biseca il suo arco AGB; perchè questo raggio bisega le corde a tutt'i punti di AGB, e le rette fra CA, e CB parallele ad AB. Se dal centro C si conducano inde-

finiti raggi distanze infinitesime il settore sarà diviso in tanti settori che si potranno considerare come tanti triangoli isosceli, le altezze dei quali sono gli stessi raggi: quindi i loro centri trovandosi a $\frac{2}{3}$ di ciascun raggio saranno, disposti

in un arco di circolo DFE, che ha per raggio $DC = \frac{2}{3} AC$: quindi il centro di gravità del settore disterrà dal centro C della distanza del centro di gravità dell'arco AFE: ora questa distanza è (§ 48) $\frac{DE \cdot FC}{DFE}$. Ma invece di DE si ponga $\frac{2}{3} AB$, invece di FC, $\frac{2}{3} CG$, e per DFE, $\frac{2}{3} AGB$: dunque la distanza del centro di gravità del settore posto dal centro è $\frac{2}{3} \cdot \frac{AB \cdot CG}{AGB}$; che è due terzi della distanza del centro di gravità dell'arco del settore.

51. Centro di gravità di un semicircolo. Se il settore divenga un semicircolo, AB sarà $2CG$, e la distanza domandata del centro di gravità sarà quattro terzi del quadrato del raggio diviso per la semicirconferenza.

52. Centro di gravità della piramide. Sia da determinarsi il centro di gravità di una piramide. Si supponga primieramente triangolare, e sia la piramide BACD.



Dal vertice A si conduca al centro di gravità I della base BCG la retta AI: come essa passa pel centro di gravità della base così passerà per i centri di gravità di tutte le sezioni parallele a que-

sta base, e ciò perchè essendo sezioni simili una stessa retta deve similmente attraversarle, e ciò della geometria: dunque la detta retta AI passa pel centro di gravità della piramide. Similmente la retta CH condotta dal vertice C al centro di gravità H della base BDA passerà pel centro di gravità della piramide. Dovendosi dunque trovare questo centro sopra ambedue le rette AI, CH deve trovarsi in un punto comune: dunque queste rette si dovranno segare in un

punto G, ed in questa intersezione si troverà il detto centro. Per conoscere la posizione di questo punto G sopra AI da A per H si conduca AE sul lato BD, questa retta segnerà BD nel punto medio E base del triangolo ABD, e da C condotta per I la retta CE a BD dovrà andare al punto E, medio della base BD del triangolo BCD. Ora le rette AI, CH si trovano nello stesso piano CEA, dunque si segheranno in un punto G. Finalmente si conduca IH. A causa dei centri di gravità dei due triangoli BCD, BDA, EI sarà un terzo di EC, ed EH un terzo di EA; dunque IH sarà parallela a CA, e perciò i due triangoli simili EHI, EAC ci danno, che come EI è un terzo di EC, così IH sarà un terzo di CA; e nei due triangoli simili GHI, AGC come IH è un terzo di AC, così IG è un terzo di GA; perciò IG sarà un quarto di tutta IA, ed AG sarà $\frac{3}{4}$ AI: quindi il centro di gravità di

una piramide triangolare è ai tre quarti della retta condotta dal vertice di un angolo al centro di gravità della faccia opposta, i tre quarti computati dal detto vertice.

Si vede poi che il centro di gravità della piramide è lo stesso centro di gravità della sezione triangolare, che dista dal di lei vertice di tre quarti dell'altezza della piramide.

Sia ora una piramide di base qualunque. Si divida questa base in tanti triangoli, e dai lati di questi pel vertice siano condotti altrettanti piani, avremo divisa la piramide in tante piramidi triangolari. I centri di gravità delle singole piramidi si troveranno sulle sezioni che distano dal comune vertice di tre quarti della comune altezza: dunque i centri di gravità delle dette piramidi si troveranno nello stesso piano distante dal vertice di tre quarti della comune altezza e perciò nello stesso piano dovrà trovarsi il centro di gravità di tutta la piramide. Se ora dal vertice della piramide si conduca una retta al centro di gravità del poligono base, questa passerà pel centro di

gravità della intera piramide: perciò questo centro di gravità deve trovarsi e sul piano distante dal vertice di tre quarti dell'altezza della total piramide, e sulla retta che dal vertice va al centro di gravità della base, dunque questo centro dovrà trovarsi nella intersezione della retta e del piano, perciò *il centro di gravità di una piramide qualunque si trova sulla retta che dal vertice va al centro di gravità della base, e dista dal detto vertice di tre quarti di questa retta.*

53. Centro di gravità del prisma. Evidentemente il centro di gravità di un prisma di base qualunque è alla metà della retta che congiunge i centri di gravità delle due basi parallele.

54. Centro di gravità di un tronco di piramide. Sia da determinarsi il centro di gravità di un tronco di piramide a basi parallele. Perciò s'intenda compita la piramide, e sia A l'altezza della piramide intera che poggia sulla base inferiore del tronco, ed a l'altezza della parte di piramide che poggia sulla base superiore del detto tronco. Le solidità delle figure simili sono come i cubi delle rette in esse similmente condotte: quindi le solidità della grande e della piccola piramide saranno come A^3 , ed a^3 , e potranno essere rappresentate da questa quantità, perchè la ragione costante sarebbe fattore di tutta l'equazione che stabiliremo. Dopo ciò $A^3 - a^3$ esprimerà la solidità del tronco proposto. La distanza del centro di gravità della piramide A^3 dalla

sua base è $\frac{1}{4} A$: dunque il suo momento sarà $\frac{1}{4} A^4$. La distanza del centro di gravità della piccola piramide dalla sua base è $\frac{1}{4} a$, per aver la detta distanza dalla base inferiore del tronco, ad $\frac{1}{4} a$ dovrà aggiungersi $A - a$ altezza del

detto tronco: quindi questa distanza sarà $A - \frac{3}{4}a$: dunque il momento di a^3 rispetto la base dell'intera piramide sarà $a^3 \left(A - \frac{3}{4}a \right)$. Se si dica x la distanza del centro di gravità del tronco dalla base superiore sarà $A - a - x$ la distanza dalla base inferiore, e quindi il momento del tronco $A^3 - a^3$ rispetto questa base sarà

$$(A^3 - a^3) (A - a - x).$$

Ora il momento dell'intera piramide rispetto la base inferiore del tronco, deve essere uguale alla somma dei momenti delle sue parti, che sono la piccola piramide ed il tronco: dunque avremo

$$\frac{1}{4} A^4 = a^3 \left(A - \frac{3}{4}a \right) + (A^3 - a^3) (A - a - x)$$

di qui avremo

$$4(A^3 - a^3)x = a^4 - 4A^3a + 3A^4$$

Il primo membro è divisibile per $A - a$, ed il secondo per $(A - a)^2$, tolto dunque dai due membri il fattore comune $A - a$, e messo in evidenza nel secondo membro l'altro fattore $A + a$ avremo

$$x = \frac{A - a}{4} \cdot \frac{3A^2 + 2Aa + a^2}{A^2 + Aa + a^2}.$$

Se si dicano b , B le basi superiori ed inferiori delle due piramidi simili, o del tronco, dovendo essere esse come i quadrati della rette analoghe, B e b saranno come A^2 , ed a^2 , mettendo questi valori nella frazione antecedente avremo

$$x = \frac{A - a}{4} \cdot \frac{3B + 2\sqrt{Bb} + b}{B + \sqrt{Bb} + b};$$

ma $A - a$, ed x sono come la retta che congiunge i centri di gravità delle basi del tronco e la porzione di questa

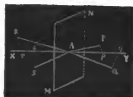
retta fra il centro di gravità e le base superiore: dunque invece di quel rapporto ponendo questo, la x del primo membro sarà la porzione della retta che congiunge i centri di gravità delle basi compresa fra il centro di gravità del tronco e la base superiore e per $A - a$ si potrà prendere d a rappresentare la detta retta, e perciò avremo

$$x = \frac{d}{A} \cdot \frac{3B + 2\sqrt{Bb + b^2}}{B + \sqrt{Bb + b^2}}.$$

CAPO IV.

Proprietà generali del centro di gravità.

55. Prima proprietà. Siano ad un punto A applicate



forze P, Q, R, S ec. e queste siano rappresentate dalle rette AP, AQ, AR, AS ec. e siano in equilibrio. Si è dimostrato (§18) che condotta per A una retta a piacere AX la somma delle com-

ponenti delle dette forze secondo AX , o la somma delle, proiezioni Ap, Aq, Ar, As cc. delle loro forze secondo AX deve essere zero: dunque abbiamo

$$Ap + Aq + Ar + As \text{ cc.} = 0.$$

Se per A si conduca un piano MN la somma antecedente è la somma delle distanze delle estremità delle forze dal detto piano. Se ora a questa estremità siano applicati pesi uguali, che diremo m , moltiplicando l'equazione antecedente per m e dividendola per tanti m quante sono le forze avremo

$$(a) \quad \frac{Ap \cdot m + Aq \cdot m + Ar \cdot m + As \cdot m}{m + m + m + m} \text{ cc.} = 0 :$$

dunque la somma dei momenti dei pesi divisa per la somma dei pesi stessi è zero; quindi il centro di gravità dei detti pesi si trova nel piano MN (§33) e poichè la posizione del piano è arbitraria, perciò il detto centro di gravità deve trovarsi nel comun punto A dei possibili piani che si segano in questo punto d'applicazione delle forze. Da ciò si ricava, che il punto d'applicazione d'un numero qualunque di forze rappresentate da rette ed in equilibrio è il centro di gravità di pesi uguali o di punti materiali applicati alle estremità delle dette forze o di masse uguali applicate coi loro centri di gravità alle dette estremità: e viceversa se il punto d'applicazione d'un numero qualunque di forze è il centro di gravità delle loro estremità considerate come punti materiali o come centri di gravità di masse uguali, le forze sono in equilibrio, perchè in questa seconda detta ipotesi la frazione (a) deve essere zero, cioè deve esser zero

$$Ap + Aq + Ar + As \text{ ec.}$$

ossia deve esser nulla la somma delle componenti delle forze secondo una retta, che è carattere d'equilibrio (§ 18).

Se non si abbiano punti materiali o centri di gravità di masse uguali, ma centri di gravità di masse qualunque m, m', m'' ec. si dicano r, r', r'' ec. le distanze dei loro centri di gravità da un dato punto A. Si moltiplichino le dette masse per le rispettive distanze dei loro centri dal detto punto A, e le quantità provenienti $mr, m'r, m''r''$ ec. si considerino come tante forze applicate al detto punto A. Siano $\alpha, \alpha', \alpha''$ ec. gli angoli che queste forze fanno con una retta qualunque che passa per A saranno

$$(a) \quad mrcos\alpha, m'r'cos\alpha', m''r''cos\alpha'' \text{ ec.}$$

le componenti di queste forze secondo questa retta, o le loro proiezioni su questa retta, o le distanze delle loro estremità da un piano qualunque che passa per A. Sia A l'origine delle coordinate ortogonali e siano x, y, z le coor-

dinate dell'estremo di r , siano x', y', z' le coordinate dell'estremo di r' , e così di seguito, avremo

$$x = r \cos \alpha, \quad x' = r' \cos \alpha', \quad x'' = r'' \cos \alpha'' \text{ ec.}$$

dunque la somma delle componenti antecedenti (a) diventerà

$$mx + m'x' + m''x'' \text{ ec.}$$

Se le forze sono in equilibrio attorno al punto A deve essere (§ 18)

$$mx + m'x' + m''x'' \text{ ec.} = 0$$

e perciò anche

$$(b) \quad \frac{mx + m'x' + m''x''}{m + m' + m''} \text{ ec.} = 0$$

lo stesso avverrà per le coordinate y , e z , dunque il centro di gravità del sistema di masse m, m', m'' ec. sarà nel punto A; e viceversa, se questo sarà il centro di gravità dovranno esser zero le frazioni come (b) relative ai tre piani, e perciò dovranno esser zero le quantità

$$mx + m'x' + m''x'', \quad my + m'y' + m''y'', \quad mz + m'z' + m''z'' \text{ ec.}$$

cioè le forze $mr, m'r', m''r''$ ec. debbono essere in equilibrio intorno al punto A. Ecco dunque il teorema generale.

Si abbia un sistema di masse ed un punto stabilito nello spazio, e si suppongano a questo punto applicate forze espresse dalle dette masse moltiplicate per le distanze dei loro centri di gravità dal detto punto, se questo punto sarà il centro di gravità del sistema delle masse, le dette forze sono in equilibrio, e se sono in equilibrio il punto di loro applicazione deve essere il centro di gravità del sistema di masse.

56. Seconda proprietà. Siano $M+1$ forze P, Q, R, S ec. applicate ad un punto A ed in equilibrio, e si suppongano all'estremità delle rette rappresentanti queste forze o punti materiali o centri di gravità di masse uguali, il

punto A sarà (§ 55) il centro di gravità di queste masse. Si prolunghi la retta rappresentante la forza P al di là del punto A di una lunghezza, che sia la M^{ma} parte di essa, e si segni l'estremo G, questo sarà il centro di gravità degli M punti materiali che sono all'estremità delle M forze Q, R, S ec. Infatti abbiamo prolungato la retta P di $\frac{P}{M}$.

Ora nel punto A della total retta $P + \frac{P}{M}$ è il centro di gravità degli $M+1$ punti materiali: all'estremo di P vi è un punto materiale dunque all'estremo G di $\frac{P}{M}$ vi deve essere la componente M. Infatti avremo la proporzione, chiamando x la massa in G (§ 25)

$$M+1: x = P + \frac{P}{M} : P$$

dunque $x=M$: da ciò si ricava che A è il centro di gravità della massa posta all'estremità di P e delle masse uguali alla detta poste all'estremità delle altre forze e che il punto A è ancora il centro di gravità della stessa massa, posta all'estremità di P, e delle M masse poste in G: dunque questo punto G è il centro di gravità delle masse uguali poste all'estremità delle forze Q, R, S ec. Da ciò viene che se un numero $M+1$ qualunque di forze è in equilibrio intorno ad un punto, una qualunque di queste forze P prolungata passa pel centro di gravità delle M masse uguali coi loro centri applicate all'estremità delle altre forze, e che questo centro dista dal punto d'applicazione delle forze stesse del M^{ma} parte di P, ovvero si può dir così. *La risultante di M forze applicate ad un punto passa pel centro di gravità delle M uguali masse coi loro centri applicate all'estremità delle rette rappresentanti le dette forze, ed il*

valore della risultante è M volte la distanza del punto d'applicazione delle forze dal detto centro di gravità.

Da ciò si ricava, che se si supponga un numero M di corpi uguali comunque collegati fra loro, e che dai loro centri di gravità siano ad un punto qualunque condotto altrettante rette, e queste si compongano a modo di forze, la risultante prolungata al di là del punto d'applicazione delle forze ad una distanza che sia la sua M^{ma} parte segnerà colla sua estremità il centro di gravità delle dette masse. Da ciò si vede, che se sia invariabile le posizione delle M masse e comunque si varii il punto A cui si riuniscono le rette condotte dei loro centri di gravità, le diverse risultanti delle diverse forze dovranno passare per lo stesso centro di gravità di posizione invariabile. Come anche se restando fisso il punto A comunque variasse il sistema e delle forze applicate in A , e della posizione delle M masse uguali applicate all'estremità delle M rette rappresentanti le forze, sempre la risultante di queste è obbligata a passare pel punto A pur passerebbe per i diversi centri di gravità delle dette masse.

Se siano disuguali le masse m, m', m'' ec. coi loro centri applicate agli estremi delle rette r, r', r'' ec. che concorrono in un punto A , considerate le quantità $mr, m'r', m''r''$ ec. come forze applicate in A , qualora siano in equilibrio, questo punto è il centro di gravità delle masse m, m', m'' ec. (§ 55); e viceversa, se quel punto è il centro di gravità delle dette masse, le forze $mr, m'r', m''r''$ ec. sono in equilibrio. Posto ciò generalizzeremo il caso antecedente.

Si ponga $M = m' + m'' + m'''$ ec. In caso d'equilibrio delle dette forze la mr volta in senso contrario è la risultante delle altre $m'r', m''r''$ ec. (§ 8). Si prolunghi essa al di là del punto A di una lunghezza $\frac{mr}{M}$, all'estremo di questa retta si troverà il centro di gravità delle masse m', m'', m''' ec.

Infatti nel punto A è il centro di gravità delle masse m, m', m'' ec. (§ 55). All'estremo di mr si può considerare un punto materiale che diremo uno, e sia x la massa all'estremità della retta $\frac{mr}{M}$. Perchè in A sia il centro delle forze

parallele collocate all'estremità della retta $mr + \frac{mr}{M}$ deve essere $1.mr = \frac{mr}{M} x$, ed $x=M$, dunque ragionando come in

(§ 56), nell'estremo di $\frac{mr}{M}$ vi è il centro di gravità delle masse m', m'', m''' ec.

57. Altra prova della proprietà antecedente. Sia come innanzi il punto A da cui partono le rette r, r', r'' ec. all'estremità delle quali coi loro centri di gravità sono applicate le masse m, m', m'' ec. e le quantità $mr, m'r', m''r''$ ec. si considerino come altrettante forze applicate in A ed in equilibrio. Se si suppongono $x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z''$ ec. le coordinate delle estremità di r, r', r'' ec. computate da A avremo l'equazioni (§ 55)

$$(a) \quad mx + m'x' + m''x'' \text{ ec.} = 0 \quad my + m'y' + m''y'' \text{ ec.} = 0, \\ mx + m'x' + m''x'' \text{ ec.} = 0,$$

Si considerino ora le forze $m'r', m''r'', m'''r'''$ ec. e si trovi il quadrato della loro risultante: questa sarà (§ 21)

$$(b) \quad (m'r')^2 + (m''r'')^2 + (m'''r''')^2 \text{ ec.} \\ + 2m'm''r'r''\cos(r', r'') + 2m'm'''r'r'''\cos(r', r''') \\ + 2m''m'''r''r'''\cos(r'', r''') \text{ ec.}$$

ove $\cos(r', r'')$ esprime il coseno dell'angolo fatto da r' con r'' , o dalle forze $m'r', m''r''$, e così degli altri. Invece di r'^2 si ponga $x'^2 + y'^2 + z'^2$, e così per gli altri: si ha poi (§ 20)

$$\cos(r', r'') = \frac{x'}{r'} \cdot \frac{x''}{r''} + \frac{y'}{r'} \cdot \frac{y''}{r''} + \frac{z'}{r'} \cdot \frac{z''}{r''},$$

e così per gli altri; per questi valori il quadrato (b) della risultante delle forze $m'r'$, $m''r''$ ec. diventerà

$$m'^2(x'^2+y'^2+z'^2)+m''^2(x''^2+y''^2+z''^2) \text{ ec.}$$

$$(c) \quad \begin{aligned} & -2m'm''(x'x''+y'y''+z'z'') \\ & +2m'm'''(x'x'''+y'y'''+z'z''') \text{ ec.} \end{aligned}$$

Se si dicano X, Y, Z le coordinate del centro di gravità delle masse m' , m'' , m''' ec. e si ritenga

$$M=m'+m''+m''' \text{ ec.}$$

avremo l'equazioni (§ 40)

$$MX=m'x'+m''x''+m'''x''' \text{ ec.}$$

$$MY=m'y'+m''y''+m'''y''' \text{ ec.}$$

$$MZ=m'z'+m''z''+m'''z''' \text{ ec.}$$

Facendo i quadrati di queste equazioni e sommando avremo

$$(d) \quad \begin{aligned} M^2(X^2+Y^2+Z^2) &= m'^2(x'^2+y'^2+z'^2) \\ &+ m''^2(x''^2+y''^2+z''^2) \text{ ec.} + 2m'm''(x'x''+y'y''+z'z'') \\ &+ 2m'm'''(x'x'''+y'y'''+z'z''') \text{ ec.} \end{aligned}$$

ma questo è il valore (c) del quadrato della risultante delle forze $m'r'$, $m''r''$ ec. che diremo R^2 , dunque

$$R=M/\sqrt{X^2+Y^2+Z^2};$$

e dicendo D la distanza del centro di gravità delle masse m' , m'' ec. dall'origine A delle coordinate, sarà $R=MD$, cioè, che questo centro dista dal punto A di applicazione delle forze $m'r'$, $m''r''$ ec. di $\frac{R}{M}$ come si è veduto (§ 56)

Se ora nelle equazioni (a) si lasci nel primo membro $-mx$, $-my$, $-mz$, si faccia il quadrato delle equazioni provenienti, e si sommino si troverà, che il valore di

$$(-mx)^2 + (-my)^2 + (-mz)^2,$$

o di

$$(-m)^2(x^2 + y^2 + z^2)$$

o di $(-m)^2 r^2$ è quello del quadrato (c) della risultante delle forze $m'r'$, $m''r''$ ec. colle quali mr è in equilibrio: ossia che questa risultante è $-mr$: dunque una qualunque delle forze in equilibrio applicate ad un punto volta in senso opposto è la risultante delle altre, come già si sa (§ 8).

58. **Terza proprietà.** Si riprenda l'equazione (d), e si ponga in essa D^2 invece $X^2 + Y^2 + Z^2$, ed invece di $x'^2 + y'^2 + z'^2$ il valore r'^2 , e così degli altri avremo

$$\begin{aligned} M^2 D^2 &= m'^2 r'^2 + m''^2 r''^2 + m'''^2 r'''^2 \\ (e) \quad &+ 2m'm''(x'x'' + y'y'' + z'z'') \text{ ec.} \\ &+ 2m'm'''(x'x''' + y'y''' + z'z''') \text{ ec.} \end{aligned}$$

Si dicano d' , d'' ec. le distanze dei centri di gravità delle masse m' , m'' , delle masse m' , m'' ec. avremo evidentemente

$$d'^2 = (x' - x'')^2 + (y' - y'')^2 + (z' - z'')^2,$$

$$d''^2 = (x' - x''')^2 + (y' - y''')^2 + (z' - z''')^2$$

ec.

da queste ricaveremo

$$2(x'x'' + y'y'' + z'z'') = r'^2 + r''^2 - d'^2$$

$$2(x'x''' + y'y''' + z'z''') = r'^2 + r'''^2 - d''^2 \text{ ec.}$$

e la formola (e) diventerà

$$\begin{aligned} M^2 D^2 &= m'^2 r'^2 + m''^2 r''^2 + m'''^2 r'''^2 \\ &+ m'm''(r'^2 + r''^2 - d'^2) + m'm'''(r'^2 + r'''^2 - d''^2). \end{aligned}$$

In questa espressione r'^2 è moltiplicata per

$$m'^2 + m'm'' + m'm'' \text{ ec.}$$

o per $m'(m' + m'' + m'' \text{ ec.}) = m' M$: così avremo che r''^2 sarà moltiplicato per $m' M$, e così di seguito, quindi sarà

$$M^2 D^2 = M m' r'^2 + M m'' r''^2 \text{ ec.}$$

$$- m' m'' d'^2 - m' m'' d''^2 \text{ ec.}$$

ossia

$$M^2 D^2 = M \Sigma (m' r'^2) - \Sigma (m' m'' d'^2)$$

Se G esprima il centro di gravità, ed O un punto dello spazio, invece di D porremo GO ad esprimere la distanza dei due detti punti. La r' indica la distanza del centro di gravità della molecola m' da O, e questa si esprimerà con $(m'O)$. La d' indicando la distanza dei centri di gravità delle molecole m' , m'' si esprimerà con (m', m'') : quindi l'equazione antecedente diventerà

$$(f) \quad M^2 (GO)^2 = M \Sigma [m' (m'O)^2] - \Sigma [m' m'' (m', m'')^2]$$

da questa

$$(GO)^2 = \frac{\Sigma [m' (m'O)^2]}{M} - \frac{\Sigma [m' m'' (m', m'')^2]}{M^2}.$$

Con questa equazione abbiamo la distanza del centro di gravità delle masse m' , m'' ec. da un punto fisso, che può essere anche uno del sistema, data per mezzo delle dette masse e delle distanze dei loro centri di gravità dal detto punto, e delle distanze fra loro dei detti centri di gravità. Questa formola quando sia ripetuta per aver la distanza del centro di gravità da due altri punti è preferibile a quelle date nel (§ 40) dove abbiamo piani coordinati, e coordinate, il tutto estraneo al sistema proposto.

59. **Quarta proprietà.** L'equazione (f) ci dà

$$(g) \quad M \Sigma [m' (m'O)^2] = \Sigma [m' m'' (m', m'')^2] + M^2 (GO)^2$$

da questa si ricava, che il punto dello spazio pel quale

$\Sigma[m'(m'O)^2]$ è del minimo valore è il centro di gravità per cui $GO=0$: dunque il centro di gravità di un numero qualunque di masse fra loro collegate è quello rispetto il quale la somma delle masse moltiplicate per i quadrati delle distanze dei loro centri di gravità da un punto ha il minimo valore.

Se il punto O varia di posizione sulla superficie di una sfera che abbia per centro il centro di gravità delle dette masse, varieranno le distanze dei centri di gravità delle masse dal punto O : ma la somma delle masse moltiplicate per i quadrati delle distanze dei loro centri di gravità da O sarà costante; e ciò perchè per l'ipotesi fatta nella (g) la $(GO)^2$ è costante, ed è assolutamente costante $\Sigma[m'm''(m',m')^2]$ pel sistema invariabile.

60. Quinta proprietà. Se poi si supponga il sistema girare comunque intorno al centro di gravità essendo fisso questo punto ed il punto O , nella formola (g) sarà invariabile il secondo membro e perciò non ostante il movimento delle masse del sistema la somma di esse moltiplicate nei quadrati delle distanze dei loro centri di gravità dal punto fisso dello spazio rimarrà costante.

61. Sesta proprietà. Se le masse m', m'' ec. siano uguali e ciascuna si supponga uno nell'equazione (g), M diventerà il numero n di queste masse, ed avremo

$$n\Sigma(m'O)^2 = \Sigma(m', m'')^2 + n^2(GO)^2,$$

e se il punto O diventa il centro di gravità G delle dette masse sarà

$$n\Sigma(mG)^2 = \Sigma(m', m'')^2$$

questa formola ci dice, che la somma dei quadrati delle distanze di punti materiali di qualunque numero, e di qualunque disposizione è uguale alla somma dei quadrati delle loro distanze dal centro di gravità ripetuta pel numero dei punti. Se i punti sono masse, per questi s'intendano i centri di gravità delle masse.

Di qui, la somma dei quadrati dei tre lati d'un triangolo è uguale al triplo della somma dei quadrati delle distanze dei vertici del detto triangolo al centro di gravità del triangolo stesso, o al triplo della somma dei quadrati delle distanze dei vertici del triangolo dalla intersezione delle rette che dai detti vertici vanno alla metà dei lati opposti.

Ancora la somma dei quadrati dei sei spigoli di una piramide triangolare è uguale a quattro volte la somma dei quadrati delle distanze dei vertici dei quattro angoli tri-dri dal centro di gravità della piramide, perchè questo punto è il centro di gravità di quattro punti materiali nei vertici dei detti angoli. La stessa ragione è pel triangolo.

Nell'equazione (f) coincida il centro di gravità col punto O avremo $M \sum [m'(m'G)^2] = \sum [m'm''(m',m'')^2]$. Sostituendo nella (f). invece di questo secondo membro il primo avremo

$$M(GO)^2 = \sum [m'(m'O)^2] - \sum [m'(m'G)^2].$$

Si suppongano uguali le masse m' , m'' ec. e siano di un numero n sarà $M = nm'$, quindi l'equazione antecedente diventerà

$$\sum (m'O)^2 = \sum (m'G)^2 + n(GO)^2$$

cioè in un sistema di corpi di numero n la somma dei quadrati delle distanze dei loro centri di gravità da un punto qualunque è uguale alla somma dei quadrati delle distanze dei detti centri dal centro di gravità più n volte il quadrato della distanza del punto dal centro di gravità.

Da ciò si ricava, che la somma dei quadrati delle distanze dei tre vertici di un triangolo da un qualunque punto anche fuori del piano del detto triangolo è uguale alla somma dei quadrati delle distanze dei detti vertici dal centro di gravità del triangolo più il triplo del quadrato della distanza del detto punto da questo centro di gravità.

Si avrà eziandio, che in una piramide triangolare la somma dei quadrati delle distanze dei vertici dei quattro angoli trie-

dri da un punto qualunque dello spazio è uguale alla somma dei quadrati delle distanze dei detti vertici dal centro di gravità più il quadruplo della distanza del detto punto da questo centro.

Si ha ciò col supporre ai vertici degli angoli del triangolo e della piramide masse uguali applicate nei loro centri di gravità, e dal sapere che il loro centro di gravità coincide col centro di gravità di queste figure.

62. Settima proprietà. *Si supponga una linea qualunque di semplice curvatura, che si avvolga intorno ad una retta, la superficie generata da questa rivoluzione sarà uguale alla linea generante moltiplicata per la circonferenza descritta dal di lei centro di gravità nella rivoluzione.*

Sia s un elemento infinitesimo della detta linea, che si potrà prendere per una linea retta. Nella detta rivoluzione di questa la s genererà la superficie di un cono troncato. Si dica r la distanza del suo punto medio, o del suo centro di gravità dalla retta intorno a cui fa la sua rivoluzione, sarà $2\pi rs$ la superficie del detto tronco, e la somma di $2\pi rs$, ossia $2\pi \Sigma rs$ estesa a tutti gli elementi della linea in proposito sarà la superficie generata da essa. Ora dicendo D la distanza del centro di gravità di questa retta

dall'asse di rivoluzione abbiamo (§ 40) $D = \frac{\Sigma rs}{\Sigma s}$. Se que-

sta equazione si moltiplica per $2\pi \Sigma s$ avremo $2\pi D \Sigma s = 2\pi \Sigma rs$. Ora il secondo membro è come si è detto la superficie generata dalla linea avvolgendosi intorno all'asse, e $2\pi D \Sigma s$ è circonferenza descritta dal centro di gravità della linea nella rivoluzione, moltiplicata per la linea stessa: dunque è dimostrato il teorema.

63. *Si consideri ora una superficie piana che si avvolga intorno ad un asse, il solido generato da questa superficie è uguale alla circonferenza descritta dal centro di gravità nella rivoluzione, moltiplicata per la detta superficie generante.*

Sia la superficie ADC che si ravvolga intorno all'asse AC



ed in questa si consideri il rettangolo infinitesimo $ntrt$. Nella rivoluzione della figura questo rettangolo genererà un anello solido, che sarà la differenza dei due cilindri l'uno interno generato dal rettangolo $risq$, e l'altro

esterno generato del rettangolo $ntrq$. Si dica d l'altezza del rettangolo minore e $d+b$ l'altezza del maggiore, che s'indicherà con d' : sia finalmente $tn = a$. Ciò posto sarà il cilindro interno πad^2 , e l'esterno sarà $\pi ad'^2$, dunque l'anello solido generato dal rettangolo ntr sarà $\pi(d'^2 - d^2)a$, ossia

$$\pi(d' + d)(d' - d)a = 2\pi \left(d + \frac{b}{2} \right) ba.$$

Ora ba è l'area del detto rettangolo, e $2\pi \left(d + \frac{b}{2} \right)$ è la circonferenza descritta dal

suo punto medio, o dal suo centro di gravità nella rivoluzione della figura, e del rettangolo; esprimendo dunque con s la superficieola del rettangolo, con r la distanza del suo centro di gravità dall'asse AC di rotazione, il solido generato dal rettangololetto sarà espresso da $2\pi r s$, ed il solido generato da tutti i rettangoli elementari della superficie ADC, o il solido generato da questa nella sua rivoluzione sarà espressa da $2\pi \Sigma r s$.

Se si dica D la distanza del centro di gravità della superficie in proposito ADC dall'asse di rotazione AC avremo

$$D = \frac{\Sigma r s}{\Sigma s}.$$

Si moltiplichi l'equazione per $2\pi \Sigma s$ ed avremo $2\pi D \Sigma s = 2\pi \Sigma r s$. Il secondo membro come abbiain veduto esprime il solido generato nella rivoluzione dalla superficie, ed il primo membro è la circonferenza $2\pi D$ descritta dal centro di gravità della superficie ADC moltiplicata per Σs che è la superficie generante ADC, quindi è dimostrato il teorema.

centro di gravità del settore dista dal centro di (§ 50)
 $\frac{2}{3} \frac{AB \cdot CG}{AGB}$: dunque il solido generato dal settore avvolgendosi intorno al punto C e mantenendo la corda parallela ad XY sarà $\frac{4\pi}{3} \frac{AB \cdot CG}{AGB} \cdot AGB \cdot \frac{1}{2} GC = \frac{2\pi}{3} AB \cdot CG^2$. Il centro di gravità del triangolo ACB dista da C di $\frac{2}{3} CI$: dunque il solido generato da questo triangolo avvolgendosi intorno al punto C col mantenere la corda AB parallela ad XY sarà $\frac{4\pi}{3} CI \cdot \frac{AB \cdot CI}{2} = \frac{2\pi}{3} AB \cdot CI^2$.

Ora la differenza dei due trovati solidi è il riporto solido intorno al cilindro, che si domandava: quindi il suo valore sarà

$$\frac{2}{3} \pi AB \cdot CG^2 - \frac{2}{3} \pi AB \cdot CI^2 = \frac{2}{3} \pi AB (CG^2 - CI^2).$$

Essendo l'angolo C di 90° , il triangolo CIB sarà isoscele, quindi $CB^2 = CG^2 = 2CI^2$. Inoltre $AB = 2CI$. Sostituendo questi valori nell'antecedente uguaglianza avremo, che il riporto solido sarà $\frac{4}{3} \pi CI^3$. Ora questa è la solidità della sfera iscritta al cilindro che ha il raggio CI: dunque il riporto solido, che avvolge la superficie cilindrica è uguale alla solidità della sfera iscritta al cilindro, mentre si sa che la superficie del cilindro uguaglia la superficie della detta sfera iscritta secondo il celebre teorema di Archimede.

CAPO V.

Teoria delle coppie.

65. Il caso di due forze uguali parallele ed opposte si ammetteva solamente come un caso eccezionale all'esistenza della

risultante delle forze parallele, e niente di più: ma dopo le sagaci ricerche di *Poinsot*, che molto si è occupato della rotazione dei sistemi, il detto caso è il fondamento della teoria semplice e generale dell'equilibrio dei sistemi invariabili, e forma il soggetto che ora imprendiamo a trattare; cioè avolveremo i teoremi riguardanti il caso indicato, di cui ci serviremo nella statica per stabilire le condizioni dell'equilibrio.

66. Si dichiara ciò che s'intende per coppia. Al sistema di due forze uguali parallele ed opposte applicate ad una retta, e ad essa normali si dà il nome di *coppia*. Per queste coppie daremo in primo luogo il metodo di traslocarle senza cambiamento del sistema: 2° si tratterà dell'equivalenza delle coppie e se ne ricaverà il valore: 3° faremo la composizione delle coppie: 4° ci serviremo delle coppie per traslocare a piacere le forze di un dato sistema: in ultimo facendo uso delle teorie antecedenti, troveremo la condizione perchè un sistema qualunque di forze abbia una risultante, e sia in equilibrio.

67. Traslocamento delle coppie. Una coppia si può trasportare dovunque sopra il piano in cui si trova, o ad un piano parallelo che faccia corpo con esso. Una coppia di due forze uguali a P si esprimerà così $(P, -P)$.



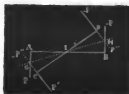
Sia dunque una coppia $(P, -P)$ applicata al braccio di leva AB nel piano X . Nel piano parallelo Y s'immagini la coppia $(P', -P')$ di leva $CD=AB$ e parallela ad AB . S'immaginino, nei punti C e D applicate nor-

malmente le forze $P'', -P''$, ciascuna uguale a P' , uguale a P . Le quattro forze che si trovano nel piano Y si elidono, e perciò il sistema dei due piani X, Y collegati non avrà moto che dalla coppia proposta $(P, -P)$. Si

congiungano i punti B, C, ed i punti A, D colle rette BC, AD; queste si segheranno nel punto I, che sarà il punto medio di esse a causa del parallelismo ed uguaglianza delle rette BA, CD. Ora le due forze $-P$, $-P''$ avranno una risultante uguale alla loro somma da porsi nel punto medio I di BC, e parimente le due forze P, P' avranno una risultante uguale alla loro somma nel punto I medio di AD; ora queste forze uguali ed opposte applicate in I si elidono, quindi delle sei forze che avevamo nei due piani X, Y rimangono le due $P', -P'$ che formano una coppia di leva CD, che è la coppia proposta $(P, -P)$ di leva AB trasportata dal suo piano X in un altro parallelo Y, che s'intende far corpo col primo.

Affinchè la proposizione superiore abbia tutta la sua estensione di prova manca il dimostrare, che una coppia si può trasportare dovunque sopra il suo piano.

Sia la coppia $(P, -P)$ di braccio di leva AB; per il punto



I medio di AB si conduca a piacere una retta $CD=AB$, ed agli estremi si applichino normalmente le forze $P', -P'$ uguali a P, avremo così una coppia $(P', -P')$ di leva CD, coppia eguale alla proposta. Ai punti D e C si applli-

chino le forze $P'', -P''$ normali a CD ed uguali ad una delle quattro forze indicate. Avendosi l'equilibrio fra le quattro forze applicate agli estremi di CD, tutto il sistema delle sei forze non è in effetto che quello della coppia proposta $(P, -P)$. Segandosi le direzioni di P'' con quella di $-P$ in H, si conduca IH, avremo due triangoli IDH, IBH coincidenti, e perciò la retta IH taglierà in mezzo l'angolo DHB, e l'angolo $-PHP''$; ma le forze $-P$, P' sono uguali, dunque la loro risultante segnerà in mezzo il detto angolo $-PHP''$, e perciò questa risultante agirà secondo IH.

Parimente dall'altra parte conducendo IG da I nella intersezione delle direzioni di P, e $-P''$, si proverà che la loro risultante v'è secondo IG; ora la risultanti secondo IH, ed IG sono eguali e contrarie, dunque si annullano, quindi si possono escludere le quattro forze $P, -P'', P'', -P$, e perciò non rimarranno che le due forze $P', -P'$ che danno la coppia di leva CD, dunque veramente la coppia $(P, -P)$ si è potuta trasportare dovunque nel suo piano.

68. Equivalenza delle coppie. Una coppia $(P, -P)$ di leva AB equivale ad una coppia $(Q, -Q)$ di leva IC se i loro momenti $P.AI, Q.IC$ sono uguali.

Infatti si prolunghi AI in C in guisa che con una forza $Q'=Q$ si soddisfi all'equazione $P.AI=Q'.IC$. Al punto I si applichino le forze $Q, -Q$, e al punto C le forze $Q', -Q'$, di valore Q: queste forze saranno in equilibrio, e perciò tutte le sei forze che abbiamo si riducono all'effetto della coppia $(P, -P)$. Le due forze P, Q' hanno una risultante in I uguale alla loro somma, perchè per ipotesi $P.AI=Q'.IC$ (§ 24): ma questa somma di forze $P+Q'$ viene elisa dalla forza opposta $-P-Q$: dunque delle sei forze spariscono queste quattro, e l'effetto della coppia proposta vien prodotto dalla coppia $(Q, -Q')$ di leva IC, posta però la condizione $P.AI=Q.IC$.

69. Relazioni dei valori delle coppie. Siano due coppie $(P, -P), (Q, -Q)$ a bracci eguali AB, CD, e supponiamo che le forze P e Q siano fra loro come 5 a 3; ciò vuol dire che le forze P, $-P$ dividendosi in 5 parti uguali le Q, $-Q$ si potranno dividere in 3. Si faccia questa divisione, ed il valore di una parte sia



espresso per M , è evidente che la coppia $(P, -P)$ sarà divisa in cinque coppie $(M, -M)$, e la coppia $(Q, -Q)$ in tre coppie $(M, -M)$ di bracci uguali, le prime di braccio AB , le altre di braccio CD , e perciò tutte queste coppie sono fra loro uguali: quindi perchè la prima coppia equivale a cinque e la seconda a tre, potremo dire intensità della prima ad intensità della seconda come cinque a tre; cioè le intensità delle coppie a bracci uguali sono fra di loro in ragione delle forze delle due coppie. Ciò suppone, che le forze siano tra loro commensurabili. Supponiamo però che siano incommensurabili, ed ammettiamo se è possibile che l'indicata proporzione non abbia luogo in questo caso. È evidente però che modificando un termine della voluta proporzione si potrà far sussistere. Supponiamo dunque, che invece dell'intera forza della coppia $(P, -P)$ si ammetta una forza minore Ap , dunque avremo, intensità della prima coppia ad intensità della seconda, come Ap sta a CQ . Si prenda una misura minore di Pp , che entri esattamente in AP ed in CQ : vi sarà un punto di divisione fra p , P , e questo sia c , talchè avremo che Ac sarà commensurabile, e perciò avremo due coppie di forze Ac , CQ commensurabili a bracci uguali; quindi sarà intensità della coppia $(Ac, -Ac)$ ad intensità della coppia $(CQ, -CQ)$ come Ac a CQ , ma avevamo intensità della coppia $(AP, -AP)$ ad intensità della coppia $(CQ, -CQ)$ come Ap a CQ ; dunque a causa del rapporto comune $(CQ, -CQ)$: CQ avremo intensità della coppia $(Ac, -Ac)$ ad intensità della coppia $(AP, -AP)$ come Ac ad Ap ; cioè l'intensità della prima coppia, che è minore della seconda è come una retta Ac maggiore di Ap . Dunque in genere *le intensità delle coppie a bracci uguali sono fra loro come le forze.*

70. Dimostro che *le intensità delle coppie qualunque sono fra loro come i momenti delle coppie stesse; cioè come le forze moltiplicate per i loro bracci.*

Siano due coppie $(P, -P)$, $(Q, -Q)$ a bracci p, q . Immagino una coppia $(\frac{qQ}{p}, -\frac{qQ}{p})$ a braccio p , questa sarà equivalente alla coppia $(Q, -Q)$ a braccio q , perchè la prima mi dà il momento $\frac{qQ}{p} \cdot p$ o qQ che è il momento della seconda, dunque l'una può sostituirsi all'altra: lasciando quindi la coppia $(Q, -Q)$ e ritenendo l'equivalente $(\frac{qQ}{p}, -\frac{qQ}{p})$ di braccio p , e confrontandola coll'altra $(P, -P)$ pure a braccio p , abbiamo due coppie a bracci uguali, dunque le loro intensità saranno come le forze; perciò intensità della coppia $(P, -P)$ sta all'intensità della coppia $(\frac{qQ}{p}, -\frac{qQ}{p})$, come P a $\frac{qQ}{p}$, come Pp sta a qQ ; ma invece dell'intensità di $(\frac{qQ}{p}, -\frac{qQ}{p})$ possiamo mettere l'intensità dell'equivalente $(Q, -Q)$, dunque abbiamo, intensità della coppia $(P, -P)$ ad intensità della coppia $(Q, -Q)$ come Pp a qQ , cioè le intensità di due coppie qualunque sono come le forze moltiplicate per i bracci, o come i loro momenti.

71. Valore numerico delle coppie. Dopo ciò possiamo trovare il valore numerico di qualunque coppia: per ciò si fisserà in una coppia la forza come uno, e il braccio pure come uno, ed in una coppia qualunque si valuterà la forza ed il braccio rispettivamente nelle unità di forza e braccio della prima: allora l'intensità della coppia proposta stando all'intensità della coppia unità come il momento della prima al momento della seconda che è uno, l'intensità della prima sarà tante volte l'intensità della seconda quante volte l'unità entrerà nel momento della prima, e perciò la prima intensità sarà valutata nell'intensità della seconda presa per unità.

72. Composizione e decomposizione delle coppie.

In questa composizione delle coppie, sia per primo il caso delle coppie in piani paralleli, o nello stesso piano. Siano due coppie di forze P, Q di bracci p, q . Se sono in piani paralleli si riducano sullo stesso piano (§ 67). Si consideri una coppia di forza P' e di braccio D , equivalente alla prima, perciò dovrà essere (§ 68) $P'D = Pp$, da cui, avendosi il braccio D , avremo il valore di P' . Sia un'altra coppia di forza Q' e dello stesso braccio D , equivalente a quella di forza Q e di braccio q , avremo $Q'D = Qq$, da cui ricaveremo Q' . Avendosi adesso invece delle due coppie proposte le due di forze P', Q' , e dell'istesso braccio D , equivalenti alle prime, e nello stesso lor piano, si trasportino queste coppie fino a sovrapporre i bracci uguali, allora se le coppie tendono a ruotare nello stesso senso si sovrapporrà la forza P' alla Q' e la $-P'$ alla $-Q'$, quindi abbiamo una sola coppia $(P' + Q', -P' - Q')$ di braccio D , che sarà la risultante delle due coppie proposte: il momento della coppia risultante è $(P' + Q')D = Pp + Qq$, dunque *la coppia risultante ha il momento uguale alla somma de' momenti delle coppie componenti*; e le forze della coppia risultante sono rispettivamente i momenti Pp, Qq delle coppie componenti divisi pel braccio fissato della coppia risultante

Se le coppie proposte tendessero a ruotare in senso opposto la coppia risultante sarebbe stata di forza $P' - Q'$ e quindi di momento $(P' - Q')D = Pp - Qq$, cioè *il momento della coppia risultante è uguale alla differenza dei momenti delle coppie componenti*.

Se le coppie fossero più di due se ne troverebbe la coppia risultante collo stesso metodo, e colla stessa relazione di momenti. Sia infatti una terza coppia di forza R e di braccio r , invece delle tre coppie abbiamo due coppie l'una di forza $P' + Q'$, e di braccio D , l'altra di forza R e di braccio r . Ciò che si è fatto riguardo alle due coppie

primitive si faccia rispetto queste due, potremo avere così invece di esse due coppie di forze P'' , Q'' di braccio comune D' , e ad esse equivalenti colla condizione $P'D' = (P' + Q')D$, $Q'D' = Rr$. Trasportando ed applicando l'una sull'altra queste coppie, come nel caso antecedente, avremo una coppia risultante di forza $P'' + Q''$ di braccio D' e di momento $(P'' + Q'')D' =$ (per le antecedenti eguaglianze) $(P' + Q')D + Rr =$ (ponendo il valore di $(P' + Q')D$) $Pp + Qq + Rr$, cioè la coppia risultante ha il suo momento eguale alla somma dei momenti delle componenti: il suo braccio è dato, e le forze P'' , Q'' sono uguali a

$$\frac{(P' + Q')D}{D'}, \frac{Rr}{D'},$$

ossia uguali a

$$\frac{Pp + Qq}{D'}, \frac{Rr}{D'}.$$

Il teorema allo stesso modo si può portare ad un numero qualunque di forze, e perciò in genere si può trovare la risultante di un numero qualunque di coppie che si trovano nello stesso piano, o in piani paralleli; ed il momento della coppia risultante è uguale alla somma de' momenti delle coppie componenti se tutte le coppie tendono a ruotare nello stesso senso. Sarà poi la differenza per li momenti di quelle coppie che tendono a ruotare in senso opposto.

73. Decomposizione di una coppia. Sia la coppia $(P, -P)$ di braccio AB nel piano



ZAP , e si vogliano trovare due coppie equivalenti in due piani ZX, ZY congiunti ad angolo e coll'intersezione AZ col primo piano ZAP . Per AB si conduca un piano $DACB$ normale ai due

piani ZX, ZY che li seghi secondo AX, AY ; da B si con-

ducano BC parallela ad AY che seghi in C la AX, e BD parallela ad AX, che seghi in D la AY. Al punto D si applichino due forze opposte $P, -P$ parallele a BP: il sistema delle quattro forze sarà in effetto la coppia proposta. Ora la coppia $(P, -P)$ a braccio BD s'intenda trasportata nel piano parallelo ZX e sia la coppia $(P, -P)$ di braccio AC; avremo allora che la coppia proposta $(P, -P)$ di braccio AB equivale alle due $(P, -P)$ di braccio AD, e $(P, -P)$ di braccio AC. Dunque una coppia $(P, -P)$ di braccio uguale alla diagonale di un parallelogrammo, DACB, equivale a due coppie pur $(P, -P)$ di bracci uguali ai lati AD, ed AC non paralleli del parallelogrammo colla condizione che le forze delle coppie componenti siano parallele alle forze della coppia risultante. Il viceversa del teorema è chiarissimo.

74. Risultante di coppie congiunte ad angolo.



Siano due coppie $(P, -P), (Q, -Q)$ di bracci AB, AC; supponiamo che $-P, -Q$ siano secondo una stessa retta, e troviamo la risultante di queste due coppie. Si congiunga B con C colla BC, e si spezzi questa in parti inversamente proporzionali a P e Q in g; in questo punto si potrà applicare una forza $P+Q$ parallela alle due in B, C che sarà la loro risultante; avrò con ciò invece delle due coppie proposte una coppia sola di forza $P+Q$ e di braccio Ag, che sarà la loro risultante. Da g si conduca gm parallela ad AB, gl parallela ad AC, avremo il parallelogrammo Algm: si vuol provare che i lati Al, Am, di questo parallelogrammo sono proporzionali ai momenti P.BA, Q.CA delle coppie proposte, e che la diagonale Ag è proporzionale al momento $(P+Q) Ag$ della coppia risultante. Si faccia $P+Q=R$; i tre momenti saranno P.AB, Q.AC,

R.Ag. Le tre forze P, Q, R sono come Cg, Bg, BC, dunque potremo dire P.BA: Q.CA: R.Ag=Cg. AB: Bg. AC: Ag. BC; ma per li triangoli simili Cgm, CBA abbiamo Cg: gm (=Al)=CB: AB: dunque Cg. AB=CB. Al. Parimenti per i triangoli simili Bgl, BAC, Bg: BC=gl (=Am): AC, dunque Bg. AC=Am. BC, perciò riprendendo l'antecedente uguaglianza di rapporti, e facendovi queste sostituzioni, avremo P.AB: Q.AC: R.Ag=Al.BC: Am.BC: Ag.BC=Al: Am: Ag, come si dovea dimostrare. In conseguenza se sopra i lati delle due coppie componenti si prendano le parti Am, Al, a rappresentare i momenti di queste coppie, compito il parallelogrammo Ag, la diagonale Ag rappresenterà il momento della coppia risultante o la sua intensità, e darà anche questa coppia, perchè basterà agli estremi di questa diagonale applicare forze opposte ognuna delle quali sia la somma delle forze componenti e parallele alle componenti stesse.

75. Rappresentanza delle coppie per mezzo delle rette come le semplici forze. 1° Rappresentanza della posizione della coppia. Invece di determinare la posizione d'una coppia per mezzo della posizione del suo piano, si può determinarla per mezzo della posizione di una retta qualunque normale a questo piano, e che si potrà chiamare *l'asse della coppia*. Poichè una coppia può suppersi dove si vorrà o sul suo piano, o in un piano parallelo (§67), egli è chiaro, che si conoscerà la posizione d'una coppia nello spazio allorchè si conoscerà la posizione del suo asse: imperocchè elevando ove si vorrà in questo asse un piano normale si potrà prendere questo piano per quello della coppia proposta: in questa guisa la posizione delle differenti coppie parallele può esser data da una sola retta perpendicolare ai piani delle coppie, e che sarà di queste l'asse comune.

Se le coppie sono poi in piani qualunque, si supporrà in primo luogo che siano trasportate in piani rispettiva-

mente paralleli, e tutti condotti per uno stesso punto A preso a piacere nello spazio, e che diventerà il comun centro di tutte le coppie. Se si prende poi questo punto per l'origine delle normali che si elevano a questi piani rispettivi, le posizioni delle differenti coppie saranno date da quelle di altrettante rette che partono dallo stesso punto A, e che fanno fra loro gli stessi angoli dei piani delle coppie proposte.

76. Rappresentanza del valore delle coppie. Di più se partendo da questo punto A si prenderanno sulle dette rette le lunghezze AL, AM, AN ec. proporzionali ai momenti rispettivi delle coppie, e che s'indicheranno colle lettere L, M, N ec. ciascuna di queste rette così limitata come AL, rappresenterà allo stesso tempo l'asse, e la grandezza L della coppia che gli corrisponde, cioè la posizione e valore della coppia.

77. Rappresentanza del senso d'agire della coppia. Finalmente si può far sì che la stessa retta AL possa indicare il senso secondo il quale la coppia agisce, o tende a far girare il braccio. E questo è ciò che manca onde in tutto una coppia sia rappresentata da una retta, cioè nella posizione, valore e senso d'agire. Sia perciò una coppia di cui AL rappresenta la posizione ed il valore. Si supponga un occhio in L che rimiri la detta coppia. Se la rotazione si farà da sinistra a dritta del riguardante si considererà come positiva, e come negativa se la rotazione avverrà da dritta e sinistra. Ciò è desunto da questo che se con un occhio posto al polo del Nord si guardino i paralleli dalla parte di mezzodi si veggono gli astri muoversi da sinistra a dritta.

Per questa maniera di determinare le coppie, e d'indicarne i sensi simultanei si vede, che la rappresentanza geometrica di un numero qualunque di coppie qualunque diventa perfettamente la stessa di quella di un numero qualun-

que di forze qualunque applicate ad un punto, e siamo in istato come or ora vedremo di farne la composizione e decomposizione come quella delle forze.

78. Composizione di due coppie rappresentate da due assi congiunti ad angolo. Se due coppie L , M



sono rappresentate nella posizione valore e senso di rotazione di due lati AL , AM di un parallelogramma $ALGM$ queste due coppie si compongono in una sola G rappresentata in posizione, valore e senso di rotazione della diagonale AG di questo parallelogramma. Infatti dal punto A , e nel piano del parallelogramma $ALGM$ si conducano due rette nn' , mm' normali e proporzionali ai due lati rispettivi AL , AM e che siano ambedue divise nel loro punto medio da A . Se si compiscono i parallelogrammi $Am'n'g'$, $Amng$ è chiaro, che questi saranno uguali fra loro e simili al parallelogramma $ALGM$, e quindi la retta gg' sarà perpendicolare e proporzionale ad AG , o divisa in mezzo nel punto A . Sulle rette mm' , nn' come bracci di leva ed in piani normali a quello della figura si applichino due coppie l'una $(P, -P)$ sulla nn' , l'altra $(P, -P)$ sulla mm' , e supponiamo, che ambedue tendano a girare da sinistra a dritta quando le guardiamo da L , ed M . Egli è evidente, che queste coppie possono essere prese per quelle rappresentate dei lati AL , AM . Imperocchè esse, 1° sono in piani normali a questi lati, 2° i loro momenti sono proporzionali ai detti lati, 3° il senso delle loro rotazioni simultanee sono secondo la convenzione stabilita. Dopo ciò egli è facile vedere, che queste coppie si compongono in una sola rappresentata dalla diagonale AG . Difatti le due forze P , P applicate in m , n si compongono in una sola $2P$ parallela e diretta nello stesso senso applicata in c , punto medio di

ma , e per conseguenza medio di Ag . Similmente le due $-P$, $-P$ in m' , n' si compongono in una $-2P$ applicata in c' punto medio di Ag' : così si ha la coppia $(2P, -2P)$ di braccio ce , o la coppia $(P, -P)$ di braccio doppio gg' . Ora questa coppia è evidentemente normale e proporzionale alla diagonale AG , e tende a produrre la rotazione da sinistra a destra quando si riguardi da G .

Ecco come le coppie si rappresentano e compongono. come le forze: si rappresentano con rette, e si compongono come nel teorema del parallelogrammo. Quindi per le coppie esistono le stesse formole trigonometriche che abbiamo date pel parallelogrammo, parallelepipedo, e poligono, le rette delle quali figure invece di essere forze nel caso nostro sono momenti di coppie.

79. Traslazione delle forze coll'intervento delle coppie. Sia P una delle forze di un sistema applicata ad



un punto B . Si consideri un punto qualunque A invincibilmente collegato con B ed al punto A siano applicate due forze P' , $-P'$ contrarie, ciasenna nguale alla P , adessa parallele e nello stesso piano con questa; egli è evidente che per l'annullamento di queste due forze il sistema si rimane nell'effetto di P . Si conduca la retta AI normale alla di-

rezione di P , e s'intenda questa applicata in I . Abbiamo con ciò una coppia $(P, -P')$ di braccio AI , e la forza P' , che è la P trasportata parallelamente a se stessa in un punto qualunque A . Da ciò si ricava che una forza di un sistema si può trasportare parallelamente a se stessa in un punto qualunque che faccia corpo col sistema purchè si consideri una coppia di forze uguali alla proposta, e di braccio la distanza fra le due forze, la proposta e la traslocata. Il senso della rotazione della coppia dipende dalla posizione del

punto di traslocamento delle forze. Se il punto a cui è trasportata la forza è alla dritta di chi guarda la figura, la coppia risultante del traslocamento della forza rota da dritta a sinistra, e se quel punto è alla sinistra la coppia risultante rota da sinistra a dritta.

80. Risultante di un sistema qualunque di forze. Si supponga un sistema qualunque di forze. Si trasportino tutte parallelamente a se stesse ad essere applicate ad un punto, di queste forze si troverà sempre una risultante. Avendosi altrettante coppie si troverà la coppia risultante. *Quindi un sistema qualunque di forze si riduce sempre ad una forza sola, ed una coppia.* Si vede chiaro che la risultante è sempre della stessa intensità, e direzione dovunque si scelga il punto di traslocamento delle forze proposte. Non è però così della coppia risultante, perchè si è veduto, che per ogni forza che si trasloca la coppia proveniente nel suo braccio dipende dalla distanza delle due forze proposta e traslocata; e la sua direzione dipende dalla posizione del punto di traslocamento secondo che è a dritta, o a sinistra del punto di applicazione della forza proposta.

81. Coppia risultante normale alla forza risultante, e la minima. Tra tutti i punti di traslocamento delle forze di un sistema ve n'è uno A per cui la coppia risultante è normale alla risultante R delle forze. Infatti sia un punto A dove è la risultante R, ed $(S, -S)$ sia la coppia risultante. Si decomponga questa in due l'una $(T, -T)$, il di cui piano sia normale ad R, e l'altra $(V, -V)$ sia in uno stesso piano con R. Su questo piano si scelga un tal punto O a tale distanza da A e tal posizione a destra o sinistra che avendosi a questo punto traslocata la R sorga una coppia uguale o contraria alla $(V, -V)$ queste due coppie si distruggeranno e rimarrà la forza R colla coppia $(T, -T)$ di piano ad essa normale: quindi esiste il punto domandato. Questo punto è unico, perchè se la R si tra-

sloca ad un nn altro punto ne risulta un'altra coppia ($R, -R$), che essendo parallela alla R è normale alla coppia ($T, -T$); composte queste danno una coppia risultante obliqua ad R .

Da ciò risulta che la detta coppia risultante delle due ortogonali essendo maggiore della componente ($T, -T$), questa non solo è l'unica normale alla risultante, ma è la minima di tutte le coppie risultanti dai possibili traslocamenti delle forze, del sistema: quindi in un sistema qualunque di forze vi è un punto, e questo unico dove trasportandosi tutte le forze danno una coppia risultante normale alla forza risultante, e questa è la minima. Si vede chiaro che nel caso indicato la risultante è l'asse della coppia risultante.

Da ciò si ricava, che per tutti i punti equidistanti dalla retta OR si ha la stessa coppia risultante: ma in piani diversi, tutti però ugualmente inclinati alla OR ; e che questa coppia si fa sempre maggiore più si fanno distanti i punti di traslocamento delle forze; ed in ultimo decomponendo qualunque coppia risultante in due rettangolari di cui una sia normale alla risultante secondo OR , si ritroverà sempre la stessa coppia minima ($T, -T$).

82. Condizione per l'equilibrio di un sistema qualunque di forze. Si deve primamente stabilire, essere impossibile che una forza sia in equilibrio con una coppia, perchè se ciò potesse essere la forza volta in senso opposto sarebbe la risultante delle due forze della coppia, ciò che non può essere (§ 28). Posto ciò dal (§ 80) si ricava subito la condizione dimandata d'equilibrio di un sistema qualunque di forze. Siano queste trasportate ad un punto, e si abbia così una risultante R , ed una coppia risultante ($S, -S$). Poichè fra R , e questa coppia non vi può essere equilibrio, quindi affinchè questo abbia luogo è necessario, che la risultante da se, e la coppia da se siano zero, cioè, che come nella composizione delle forze si giunge a due uguali e

contrarie; così nella composizione delle coppie in ultimo si abbiano due uguali in piani paralleli, o nello stesso piano e rotanti in senso opposto. Ecco dunque la condizione domandata. *Affinchè un sistema sia in equilibrio si richiede, che, trasportate tutte le forze parallelamente a se stesse ad esser applicate ad un punto, queste siano in equilibrio, ed in equilibrio tutte le coppie provenienti dal traslocamento.*

83. Condizione affinchè un sistema qualunque di forze abbia una risultante. Tutte le forze di un sistema essendo ridotte ad una forza sola, e ad una coppia (§ 82) sia R la detta forza, ed $(S, -S)$ sia la coppia.

Affinchè queste forze si possano ridurre ad una forza sola è necessario che esista una forza R' che sia in equilibrio colla forza R , e colla coppia $(S, -S)$. Esista questo equilibrio. Poichè si ha equilibrio fra le due forze R , R' , e la coppia $(S, -S)$ dico che le due forze R , R' debbono formare una coppia contraria ed equivalente alla coppia $(S, -S)$ ambedue situate nello stesso piano, o che è lo stesso, in piani paralleli. Infatti possono avvenire tre casi. Il primo è che le due forze R , R' si riducano ad una forza, ed allora questa forza non potrebbe essere in equilibrio colla coppia $(S, -S)$ (§ 28). Il secondo caso è che le due forze si riducano ad una forza ed una coppia, ed allora componendo questa colla coppia $(S, -S)$ avremo il caso antecedente di una forza ed una coppia. Il terzo caso è che le due forze formino una coppia. Ora per l'equilibrio si richiede che queste due coppie siano in un piano, o in piani paralleli, senza di che le due coppie si potranno comporre, e ridurre ad una coppia che non può esser zero (§ 28). Da ciò si ricava, che la forza R deve essere parallela alla coppia $(S, -S)$. Quindi *affinchè un sistema abbia una risultante si richiede, che trasportate tutte le forze parallelamente a se stessa per essere applicate ad un punto qualunque, la risultante R di queste forze deve essere parallela alla coppia*

risultante di tutte le coppie provenienti dalle singole forze traslocate.

Questa condizione è necessaria ma è ancora sufficiente. Infatti quando ciò avvenga, e la risultante R non sia zero è evidente che potrò applicare al sistema una forza R' parallela alla R ed a tal distanza e posizione che ne risulti una coppia equivalente ed opposta alla $(S, -S)$, e che trovandosi in piano parallelo distruggerà questa coppia. Questa forza R' stimata in senso opposto sarà la risultante del dato sistema di forze.

Del resto questa risultante sarà la R . Imperocchè essendo la R parallela al piano della coppia $(S, -S)$ si porterà questa nel piano di R parallelo al suo: disponendo allora la coppia così che le due forze $S, -S$ siano parallele ad R ; si comporrà la R colla S ed avremo la risultante $R+S$; poi si comporrà questa colla $-S$ ed avremo R .

Se la forza R fosse zero in tal caso o esiste la coppia $(S, -S)$ o non vi è risultante, o questa è pur zero, e si ha l'equilibrio, e non la risultante: quindi la condizione completa affinché un sistema di forze abbia una risultante è che la risultante delle forze trasportate parallelamente a se stesse per essere applicate ad un punto, esista e che riesca parallela al piano della coppia risultante. So la risultante R non è parallela al piano della coppia $(S, -S)$ non esiste risultante del sistema. In questo caso si trasporti la coppia $(S, -S)$ in un piano parallelo che passi pel punto d'applicazione A di R , e poi si trasporti la coppia su questo piano così che la S sia applicata al punto A , allora si trovi la risultante R' di R ed S , avremo ridotto il sistema a due forze $R', -S$ in due diversi piani dunque quando un sistema di forze non ha risultante è sempre riducibile a due forze collocate in diversi piani, e due forze in diversi piani non possono avere una risultante: imperocchè si può sempre supporre che queste due forze pro-

vengano da un'altra forza, e da una coppia, che non gli è parallela.

84. Condizione in calcolo per l'esistenza della risultante di un sistema qualunque. Abbiamo veduto (§ 83), che se un sistema di forze qualunque è riducibile ad una sola, la risultante generale deve essere parallela al piano della coppia risultante. Per esprimere questa condizione in calcolo si deve esprimere che l'asse della coppia è perpendicolare alla direzione della risultante, o che il coseno della loro inclinazione è nullo. Si dicano α , β , γ gli angoli fatti dalla risultante con tre assi ortogonali ed λ , μ , ν gli angoli fatti dall'asse della coppia coi detti assi, avremo per la cercata condizione

$$(1) \quad \cos\alpha\cos\lambda + \cos\beta\cos\mu + \cos\gamma\cos\nu = 0$$

si dica R la risultante, ed X , Y , Z le sue componenti secondo i tre assi: siano L , M , N i momenti componenti della coppia risultante, di momento G secondo i detti assi, avremo

$$\cos\alpha = \frac{X}{R}, \cos\beta = \frac{Y}{R}, \cos\gamma = \frac{Z}{R};$$

avremo ancora

$$\cos\lambda = \frac{L}{G}, \cos\mu = \frac{M}{G}, \cos\nu = \frac{N}{G};$$

dopo ciò sostituendo questi valori in (1), la condizione algebrica domandata per l'esistenza della risultante di un sistema qualunque è

$$XL + YM + ZN = 0$$

85. Delle coppie o momenti relativi diversi assi. La coppia risultante di momento G decomposta perpendicolarmente ad un asse, che forma col suo un angolo θ , essendo uguale a $G\cos\theta$, se si dicano λ' , μ' , ν' i tre angoli

che questo asse fa con quelli ortogonali delle coordinate, avremo

$$\cos\theta = \cos\lambda\cos\lambda' + \cos\mu\cos\mu' + \cos\nu\cos\nu':$$

moltiplicando per G , ed avvertendo, che

$$G\cos\lambda = L, \quad G\cos\mu = M, \quad G\cos\nu = N$$

sarà

$$(1) \quad G\cos\theta = L\cos\lambda' + M\cos\mu' + N\cos\nu'.$$

Dopo ciò si dicano, A, B, C i momenti delle coppie o delle rotazioni secondo gli assi x, y, z ; A', B', C' i momenti relativi a tre assi ortogonali delle x', y', z' aventi la stessa origine dei primi, e siano α, β, γ gli angoli fatti dall'asse delle x' coi tre primi, α', β', γ' gli angoli fatti dell'asse delle y' coi detti, $\alpha'', \beta'', \gamma''$ gli angoli fatti dell'asse delle z' coi tre ripetuti, avremo per la (1) l'equazioni

$$A' = A\cos\alpha + B\cos\beta + C\cos\gamma$$

$$B' = A\cos\alpha' + B\cos\beta' + C\cos\gamma'$$

$$C' = A\cos\alpha'' + B\cos\beta'' + C\cos\gamma''$$

elevando queste equazioni al quadrato, facendone la somma ed avvertendo alle equazioni (din. § 20) sarà

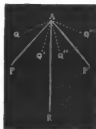
$$A'^2 + B'^2 + C'^2 = A^2 + B^2 + C^2.$$

Pertanto a qualunque terno di assi ortogonali condotti per lo stesso punto si riportino i momenti delle forze, la somma dei loro quadrati è sempre la stessa. Lo che deve essere così, perchè la detta somma dei quadrati, è il quadrato del momento della coppia risultante di tre coppie normali a tre assi ortogonali, che deve essere sempre la stessa qualunque sia la posizione dei detti assi.

CAPO VI.

Esercizi.

Siano ad un punto A applicate due forze uguali P, P'



la risultante R dividerà in mezzo

l'angolo PAP' (§ 7). Si dica que-

st'angolo $2x$, e sarà R funzione di P,

e di x , che esprimeremo con $R=f(P, x)$.

Si divida l'equazione per P e dalla in-

variabilità del quoto $\frac{R}{P}$ (§ 13) per l'in-

definita variabilità di P si ricaverà

$\frac{f(P, x)}{P} = \varphi(x)$, onde $R=P\varphi(x)$. Si de-

compongano la P' in due uguali Q'', Q''' che facciano con

essa gli angoli uguali Q''AP', Q'''AP' uguali a x , e lo

stesso si faccia per la P sarà $P' = Q''\varphi(x)$, e perciò

$R=Q''\varphi(x)\varphi(x)$. Si compongano le due forze Q', Q'' e la ri-

sultante sarà Q'' $\varphi(x-z)$; si compongano le due Q, Q''' e

sarà la risultante uguale a Q''' $\varphi(x+z)$: dunque

$$R=Q''' \varphi(x+z)+Q'' \varphi(x-z)$$

perciò

$$Q'' \varphi(x)\varphi(z)=Q''' \varphi(x+z)+Q' \varphi(x-z)$$

ossia

$$(1) \quad \varphi(x+z)+\varphi(x-z)=\varphi(x)\varphi(z)$$

da queste si deve ricavare $\varphi(x)$. E primamente si deve sta-

bilire che se l'angolo $2x$ delle forze P è zero la risultante

è uguale alla loro somma, e se $2x$ è uguale a due retti

la risultante è nulla: dunque $x=0$ dà $R=2P$; di qui $\varphi(0)=2$

ed $x = \frac{\pi}{2}$ da $R=0$: di più la R non può divenir zero per alcun valore compreso fra 0, e $\frac{\pi}{2}$. Si può facilmente vedere che la condizione $x=0, \varphi(0)=2$ viene dalla (1): imperocchè fattovi $x=0$ abbiamo

$$2\varphi(x)=\varphi(x)\varphi(0) \text{ donde } \varphi(0)=2.$$

Prendendo la seconda derivata di (1) primo rispetto ad x , e poi rispetto x se ne conchiuderà

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = \frac{\varphi''(z)}{\varphi(z)} :$$

dunque $\frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} = a$. Si ponga $\varphi(x)=y$, e l'equazione antecedente si trasforma in $\frac{d^2y}{dx^2} - ay = 0$ (2).

Qui vi sono tre risultamenti d'integrazione secondo che $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. Sia $a = 0$ avremo $y = cx + c'$, sostituendola nella (1) si avrà una equazione fra x , c , z che nella loro variabilità non si può verificare che con $c = 0$, quindi $\varphi(x)$ dovrebbe essere una costante: perciò si deve escludere il caso di $a = 0$. Sia $a > 0$ l'equazione (2) ci darà

$$y = ce^{x\sqrt{a}} + c'e^{-x\sqrt{a}}.$$

Sostituita questa in (1) per verificarla si deve avere $c = 0$, o $c = 1$ unitamente a $c' = 0$, $c' = 1$. Non si può prendere insieme $c = 0$, $c' = 0$ perchè sarebbe y , o $\varphi(x) = 0$ per qualunque valore di x , ciò che è assurdo. Non si può prendere separatamente $c = 0$, $c' = 1$ perchè $\varphi(x)$ sarebbe espressa da un solo esponenziale che non sarebbe nullo per $x = \frac{\pi}{2}$.

Si prenda dunque $c = 1$, $c' = 1$ d'onde conseguita

$$\varphi(x) = e^{+Vx} + e^{-xVx}$$

che non diventa zero per $x = \frac{\pi}{2}$ come deve essere.

Sia $a < 0$, e si ponga $a = -m^2$ l'integrale di (2) darà

$$y = \varphi(x) = c \cos mx + c' \sin mx$$

dovendo essere $y = 2$ quando $x = 0$ sarà $c = 2$ onde

$$\varphi(x) = 2 \cos mx + c' \sin mx.$$

Sostituita questa in (1) risulta una equazione dove non potendo essere zero la m , si può togliere il fattore $\sin mx$, e si ha così

$$c' \sin mx + 2 \cos mx = 0,$$

equazione che non può essere soddisfatta che da $c' = 0$: quindi $y = \varphi(x) = 2 \cos mx$. La m si determina colle condizioni

$x = \frac{\pi}{2}$, $\varphi(x) = 0$, da cui si ricava $m = 2n + 1$, ove n è un intero qualunque. Ma se non sia $n = 0$ $\cos mx$, o $\varphi(x)$ potrebbe

diventar nullo per $x = \frac{\pi}{2(2n+1)}$, valore compreso fra 0 e

$\frac{\pi}{2}$, lo che non può avvenire come si è detto dunque $\varphi(x) = 2 \cos x$, ed $A = 2P \cos x$: dunque la risultante di due forze uguali è la diagonale d'un rombo.

Colla figura qui innanzi si troverà la risultante di due forze P, Q rettangolari. Per



ciò si condurrà la IK in guisa che siano uguali gli angoli RAP, PAI , e perciò uguali gli angoli RAQ, QAK . Si decomporrà la P in due uguali secondo AI , ed AR , e la Q

in due uguali secondo AK , ed AR , e procedendo innanzi

si troverà $R^2 = P^2 + Q^2$, $P \cos \theta = Q \sin \theta$, e perciò la risultante è rappresentata dalla diagonale del rettangolo ec.

Le forze P , e Q facciano l'angolo qualunque $QAP = \alpha$.



Si decomponga la Q in due rettilinee l'una secondo AP , l'altra secondo AK : trovati i loro valori pel caso antecedente, la risultante R si avrà dall'equazione $R^2 = P^2 + Q^2 + 2PQ \cos \alpha$, e si ha $AK = Q \sin \alpha$, ed $AK = R \sin \gamma$

dunque $Q \sin \alpha = R \sin \gamma$, e similmente $P \sin \alpha = R \sin \beta$: cioè una qualunque delle tre forze è come il seno dell'angolo fatto dalle altre due. D'onde la risultante è rappresentata dalla diagonale ec.

Siano due forze parallele P , Q applicate alle estremità di una retta di lunghezza a sotto l'angolo b : per mezzo del parallelogrammo delle forze si deve determinare il valore della risultante, la sua direzione, ed il punto d'applicazione sulla retta a .

Per modificare il parallelismo delle forze, onde averle congiunte ad angolo, si decomponga la forza P in due l'una secondo la retta a , e l'altra a questa normale; applicata la prima dove è applicata Q si trovi la loro risultante, così si avranno due forze l'attuale, e la normale che non sono più parallele.

Sia una porta rettangolare di altezza a e di base b uniformemente pesante, che si muova intorno due gangheri distanti di c dagli estremi orizzontali della porta: si vogliano i valori, e le direzioni degli sforzi orizzontali sostenuti dai due gangheri, e gli sforzi verticali.

Una verga uniformemente pesante di lunghezza l , e gravata d'un peso p ai due terzi della sua lunghezza si sostiene a contatto di due rette inflessibili congiunte ad angolo retto, l'una verticale, e l'altra orizzontale, dove vi è un ritegno, onde la

verga non strisci. Si supponga che i $\frac{2}{3}$ già detti della verga siano computati dall'estremo che si appoggia alla retta verticale. Si domandano gli sforzi orizzontali della verga contro le due rette, e lo sforzo verticale sulla retta orizzontale.

Tre forze parallele sono applicate ai vertici A, B, C di un triangolo proporzionali ai lati opposti a, b, c: determinate la posizione del centro di queste forze rispetto il punto A.

Presi i lati b, c per assi delle x, y, le coordinate del centro delle date forze sono

$$X=Y=\frac{bc}{a+b+c}$$

se r esprime la distanza di questo centro da A abbiamo

$$r^2=X^2+Y^2+2XY\cos A=4X^2\cos^2\frac{1}{2}A$$

ed

$$r=\frac{2bc\cos\frac{1}{2}A}{a+b+c}$$

Tre forze parallele P, Q, R sono applicate ai vertici A, B, C d'un triangolo, e sono nella ragione inversa dei lati opposti a, b, c: determinate la distanza del centro da A.

Questa distanza è

$$\frac{a(b^2+2b^2c^2\cos A+c^2)}{ab+bc+ac}$$

Ai vertici degli angoli B, C, D del triangolo base di una piramide, che ha per vertice A, sono applicate tre forze parallele P, Q, R: determinare la distanza del loro centro dal detto vertice A. Siano gli spigoli

$$AB=b, AC=c, AD=d,$$

e gli angoli BAC, BAD, CAD siano espressi da (b, c) (b, d), (c, d), ed r sia la domandata distanza sarà

$$r^2(P+Q+R)^2=P^2b^2+Q^2c^2+R^2d^2+2PQbccos(b, c) \\ +2PRbdcos(b, d)+2QRcdcos(c, d).$$

A tre punti fissi di coordinate (a, b) , (a', b') , (a'', b'') nel piano delle x, y sono applicate tre forze parallele p, p', p'' ; supponendo la forza p'' variare a piacere di grandezza si domanda il luogo geometrico del centro delle dette tre forze parallele.

Il luogo geometrico è dato dall'equazione

$$(ap + a'p')b'' + [(a'' - a)p + (a' - a')p']y \\ = (bp + b'p')a'' + [(b'' - b)p + (b' - b')p']x$$

Ad un punto sono applicate in un piano tre forze F, F', F'' che fanno fra lor gli angoli di $105^\circ, 120^\circ, 135^\circ$, determinare il loro rapporto, onde una qualunque di esse in senso contrario sia la risultante delle altre due: deve essere

$$\frac{F}{\sqrt{3}+1} = \frac{F'}{\sqrt{6}} = \frac{F''}{2}$$

Date tre forze uguali che applicate ad un punto facciano gli angoli $105^\circ, 120^\circ, 135^\circ$, determinate il valore, e la direzione della loro risultante.

Siano le tre forze uguali a P rappresentate da F, F', F'' , e sia O il punto di loro applicazione. Se FOF', FOF'' sono gli angoli 120° , e 135° , prolungate OF che sia la retta Ox , e dite θ l'angolo, che la risultante fa con questa retta troverete

$$\tan \theta = \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1},$$

e $\theta = 37^\circ, 30'$. Sarà poi

$$R^2 = P^2 \left(2 - \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{2} \right)$$

Siano tre forze proporzionali ai tre lati di un triangolo, e siano applicate da fuori in dentro normali nei punti medi dei detti lati e giacenti nello stesso piano del triangolo: una qualunque di queste in senso contrario sarà la risultante delle altre due.

Le forze proporzionali ai lati di un poligono qualunque nello stesso suo piano, ed agenti normalmente sulla metà dei rispettivi lati da fuori in dentro sono tali che una qualunque in senso opposto è la risultante delle altre, ossia tutte le dette forze sono in equilibrio.

Per mezzo d'una forza agente secondo una fune di data lunghezza che cinge una colonna si vuole abbatterla: si domanda a quale altezza dalla base della colonna deve cingerla la fune, onde la data forza sia la più efficace.

Un peso P è sostenuto da un fulcro A per mezzo di una funicella flessibile considerata non pesante. A questo peso è attaccata un'altra funicella, che orizzontalmente passando per la gola di una girella gli è attaccato un peso p : trovare l'angolo di deviazione dalla verticale della direzione della fune che sostiene P in quiete.

Se siano a, b, c i valori dei lati di un triangolo opposti agli angoli A, B, C , ed h, k, l le distanze GA, GB, GC del suo centro di gravità dai vertici A, B, C , avremo

$$l = \frac{1}{3} (2a^2 + 2b^2 - c^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$h = \frac{1}{3} (2b^2 + 2c^2 - a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$k = \frac{1}{3} (2c^2 + 2a^2 - b^2)^{\frac{1}{2}}$$

facendo il quadrato di queste equazioni e sommandole avremo

$$3(h^2 + k^2 + l^2) = a^2 + b^2 + c^2$$

Sia una piramide triangolare di vertice O , e di spigoli in alto OA, OB, OC che facciamo uguali ad a, b, c ; gli spigoli opposti a questi nella base siano a', b', c' . Se si dica GO la distanza del centro di gravità di questa piramide da O avremo

$$GO = \frac{1}{4} [3(a^2 + b^2 + c^2) - (a'^2 + b'^2 + c'^2)]^{\frac{1}{2}}$$

Si dicano h, k, l, m le distanze del centro di gravità dai vertici O, A, B, C degli angoli della piramide atremo

$$16h^2 = 3(a^2 + b^2 + c^2) - (a'^2 + b'^2 + c'^2)$$

$$16k^2 = 3(a^2 + b'^2 + c'^2) - (b^2 + c^2 + a'^2)$$

$$16l^2 = 3(b^2 + a'^2 + c'^2) - (a^2 + c^2 + b'^2)$$

$$16m^2 = 3(c^2 + a'^2 + b'^2) - (a^2 + b^2 + c'^2)$$

che sommate ci danno

$$4(h^2 + k^2 + l^2 + m^2) = a^2 + b^2 + c^2 + a'^2 + b'^2 + c'^2$$

questo, e l'antecedente del triangolo combina col parag. 60

Un cono retto di altezza a e di base di raggio r poggia coll'estremità del suo asse orizzontale sopra due sostegni: trovare le pressioni esercitate su questi dal suo peso.

Nel caso antecedente supponete che l'estremità dell'asse del cono poggino sopra due sostegni l'uno elevato di c , e l'altro di c' sopra una comune orizzontale essendo $c > c'$, trovate le due pressioni contro i sostegni.

Provare che nel parallelogrammo delle forze due qualunque delle tre sono in ragione inversa delle normali calate sulle loro direzioni da un punto qualunque della direzione della terza. Si provi ciò col calcolo, e colla geometria.

Come applichereste colla costruzione ad un dato punto cinque forze uguali ognuna uguale ad una data retta, e giacenti in un piano affinchè la risultante fosse ad esse uguale?

In un trapezio diviso in due triangoli date il metodo grafico per determinarne il centro di gravità, e poi ricavate la formola (din. §. 47).

Due forze uguali agiscono in direzioni opposte lungo due lati opposti di un parallelogrammo, ed una terza forza lungo la diagonale; trovate la loro risultante.

Da un dato quadrato tagliate un triangolo in guisa, che la figura restante abbia il suo centro di gravità ove si trovava il vertice del triangolo.

Trovate la distanza del centro di gravità dal vertice di un angolo θ fatto da una verga uniformemente pesante ripiegata in due bracci dati a , b .

Se i lati di un triangolo ABC , sono bisegati nei punti D , E , F , il centro di gravità del circolo iscritto al triangolo DEF è il centro di gravità del perimetro del triangolo ABC .

È data la risultante e la somma di due componenti, ed ancora l'angolo che una di queste fa colla risultante, si domandano le due componenti e l'angolo che fanno.

Trovare il solido generato da una completa rivoluzione di un triangolo rettangolo intorno alla sua ipotenusa, essendo dati i cateti a , b .

Trovare il volume e la superficie di un solido generato dalla completa rivoluzione di un circolo di raggio r intorno ad una retta collocata nel suo piano, e distante di b dal suo centro.

Date due componenti e la differenza degli angoli che formano colla risultante, trovare la risultante, e gli angoli che le tre forze fanno fra loro.

Conoscendo gli angoli che la risultante e le componenti fanno fra loro, e la differenza fra la risultante ed una componente trovare le tre forze.

Conoscendo una componente, l'angolo che fa colla risultante, e la somma della risultante coll'altra componente trovare le incognite nel parallelogrammo delle forze.

Conoscendo i tre angoli che risultante e componenti fanno fra loro, e la somma di queste tre forze, determinare ciascuna.

Nel parallelogrammo delle forze si conosce una componente, l'angolo che l'altra componente fa colla risultante ed il prodotto del valore della risultante nel valore di questa componente, trovare questa risultante e componente, e l'altro angolo che è incognito.

PARTE SECONDA

STATICA

CAPO I.

Formole generali dell'equilibrio.

1. Si è veduto (din. §. 82) che la condizione affinché un sistema qualunque di forze sia in equilibrio è, che trasportate tutte le forze parallelamente a se stesse ad un punto qualunque connesso col sistema, la loro risultante sia zero, e sia nulla la risultante di tutte le coppie che provengono dalla traslazione delle singole forze, ossia che sia zero il momento della coppia risultante. Ora si deve esprimere in calcolo questa condizione.

2. Condizioni dell'equilibrio poste in equazioni.

Siano P' , P'' , P''' ec. le forze del sistema. Si riferiscano



queste forze a tre assi ortogonali Ox , Oy , Oz , e si decomponga ciascuna forza in tre secondo questi assi. Le componenti di P' siano X' , Y' , Z' ; quelle di P'' siano X'' , Y'' , Z'' , e così di seguito. Si consideri ora una P' delle propo-

ste applicata in M , e di questo punto le coordinate siano

x', y', z' . Prolungata la direzione della MZ' fino al piano yOx , lo incontri in C. Da questo punto si conducano le CB, CA parallele all'Oy, ed Ox e si conduca la diagonale OC. Applicata la componente Z' in C si trasporti ad essere applicata in O secondo Oz: avremo per ciò una coppia ($Z', -Z'$) di braccio OC. Invece di queste potremo avere (din. §. 73) due componenti ognuna essendo coppia ($Z', -Z'$), l'una di braccio $OB = x'$ l'altra il braccio $OA = y'$: quindi le due coppie componenti avranno i momenti $Z'x', Z'y'$. Parimenti per la componente X' avremo una forza X' applicata in O secondo Ox, e due coppie ognuna ($X', -X'$) sopra i piani zOx, yOx di momenti $X'z', X'y'$. E per la Y' avremo la Y' applicata in O secondo Oy, e due coppie ognuna ($Y', -Y'$) nei piani yOx, yOx di momenti $Y'z', Y'x'$. Da ciò si vede che per la forza P'' avremo le tre componenti X'', Y'', Z'' applicate in O secondo Ox, Oy, Oz e le coppie nei piani che si segano negli assi Ox, Oy, Oz di bracci che si trovano coordinate nei detti piani, e perciò di momenti $X''z'', X''y'': Y''z'', Y''x'': Z''x'', Z''y''$. Si vede poi chiaro quali saranno le forze componenti, le coppie, ed i loro momenti per le altre forze P''', P'''' ec. Dopo ciò avremo per le forze applicate in O tre sistemi di forze secondo i tre assi delle x, y, z , e quindi avremo tre forze

(1) $X' + X'' + X'''$ ec; (2) $Y' + Y'' + Y'''$ ec, (3) $Z' + Z'' + Z'''$ ec.

Ora dovendo essero zero la risultante di queste debbono essere zero parzialmente queste componenti: perchè se una è zero, esiste la risultante delle altre due; e se due sono zero la risultante è quella che rimane: dunque la prima condizione dell'equilibrio è espressa dalle (1), (2), (3) uguali a zero che si potranno esprimere con

$$(A) \quad \Sigma X' = 0 \quad \Sigma Y' = 0 \quad \Sigma Z' = 0.$$

3. Inoltre; da ciò che abbiamo detto per P' delle coppie com-

ponenti, si vede, che per ogni forza delle proposte in ogni piano coordinato abbiamo due coppie di rotazione contraria. Per esempio per la forza P' sul piano zOx abbiamo la coppia di momento $X'z'$ che rota da Oz verso Ox , e la coppia di momento $Z'x'$ che rota da Ox verso Oz : in somma per ogni forza abbiamo in ogni piano due coppie in senso contrario di momenti che sono le due componenti secondo gli assi giacenti in questi piani moltiplicate contrariamente per le coordinate in questi assi. Queste coppie in ciascun piano (din. §. 72) daranno una coppia risultante il di cui momento è la differenza dei momenti delle coppie rotanti in senso opposto: dunque nel piano zOx abbiamo la coppia di momento.

$$Z'x' - X'z' + Z''x'' - X''z'' + Z'''x''' - X'''z''' \text{ ec.}$$

ossia

$$(a) \quad Z'x' + Z''x'' + Z'''x''' - X'z' - X''z'' - X'''z''' \text{ ec.}$$

Nei piani xOy , yOz avremo per ciascuno una coppia di momenti

$$(b) \quad Z'y' + Z''y'' + Z'''y''' - Y'z' - Y''z'' - Y'''z''' \text{ ec.}$$

$$(c) \quad X'y' + X''y'' + X'''y''' - Y'x' - Y''x'' - Y'''x''' \text{ ec.}$$

La seconda condizione dell'equilibrio vuole che la coppia risultante sia zero, o che sia zero il suo momento: questo è la risultante (din. §. 78) dei momenti delle tre coppie nei tre piani coordinati: dunque questi debbono essere parzialmente zero, perchè se uno è zero abbiamo il momento risultante degli altri due; e se due sono zero abbiamo per risultante il terzo momento esistente: dunque fatte zero le (a), (b), (c) abbiamo l'equazioni che esprimono la seconda condizione dell'equilibrio

$$(B) \quad \begin{cases} \Sigma(X'y' - Y'x') = 0 \\ \Sigma(Y'z' - Z'y') = 0 \\ \Sigma(Z'x' - X'z') = 0 \end{cases}$$

4. Altra maniera di esprimere in calcolo le condizioni d'equilibrio. Le formole (A), (B) (§. 2, 3) possono esprimersi colle forze e gli angoli che esse fanno cogli assi coordinati.

Siano α', β', γ' gli angoli che la P' fa cogli assi della x, y, z , e gli angoli analoghi per P'' siano $\alpha'', \beta'', \gamma''$, e così di seguito, avremo

$$X' = P' \cos \alpha', \quad Y' = P' \cos \beta', \quad Z' = P' \cos \gamma',$$

e così del resto. Allora le dette equazioni (A), (B) d'equilibrio saranno espresse da

$$(C) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Sigma P' \cos \alpha' = 0 \quad \Sigma P' \cos \beta' = 0 \quad \Sigma P' \cos \gamma' = 0 \\ \Sigma P'(y' \cos \alpha' - x' \cos \beta') = 0 \\ \Sigma P'(z' \cos \beta' - y' \cos \gamma') = 0 \\ \Sigma P'(x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha') = 0. \end{array} \right.$$

5. Deduzione del caso che le forze concorrano in un punto. Se si suppone che le direzioni delle forze P', P'', P''' ec. concorrano in uno stesso punto, e che si sia preso questo punto per origine delle coordinate, i coseni degli angoli $\alpha' \beta' \gamma'$ ec. saranno proporzionali alle rispettive coordinate $x' y' z'$ dei punti d'applicazione, in guisa che avremo

$$x' : y' = \cos \alpha' : \cos \beta', \quad x' : z' = \cos \alpha' : \cos \gamma'$$

d'onde

$$y' \cos \alpha' - x' \cos \beta' = 0$$

$$x' \cos \gamma' - z' \cos \alpha' = 0$$

allora le tre ultime delle sei equazioni (§. 4) dell'equilibrio spariranno, e non si avranno che le tre prime, le quali ci mostrano, che per l'equilibrio di un sistema di forze applicate ad un punto è necessario, e sufficiente, che le somme

delle forze secondo tre assi siano zero ossia, che la risultante sia zero, senza le condizioni per l'equilibrio di rotazione, che di fatto in tal caso non ha luogo.

6. **Caso che le forze non formino che coppie.** Se le forze P' , P'' , P''' ec. non formano che coppie, poichè allora qualunque P' inclinata all'asse delle x con un angolo α' ne avrà nel sistema un'altra uguale inclinata allo stesso asse con angolo $180^\circ + \alpha'$, non vi sarà quantità $P' \cos \alpha'$ che non abbia la sua eguale, e di segno contrario: così i primi membri delle prime tre delle sei equazioni d'equilibrio si distruggeranno, e non avranno luogo che le tre ultime. E di fatti in questo caso non vi è che il moto rotatorio da distruggere colla condizione d'equilibrio.

7. **Ricerca della risultante delle forze P' , P'' , P''' , ec quando non sono in equilibrio, e condizione per la sua esistenza.** Supponiamo che le forze P' , P'' , P''' ec. non siano in equilibrio, e che la forza $-R$ sia capace di produrlo, in tal caso R sarà la risultante (din. §. 8). Allora le sei equazioni d'equilibrio avranno luogo introducendoci la $-R$. Siano α , β , γ , gli angoli che la R fa coi tre assi. Facendo per abbreviare

$$(1) \quad \Sigma P' \cos \alpha = X, \Sigma P' \cos \beta = Y, \Sigma P' \cos \gamma = Z$$

avremo

$$X - R \cos \alpha = 0, Y - R \cos \beta = 0$$

$$Z - R \cos \gamma = 0$$

dalle quali si ricava (ricordandoci dell'equazione $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$).

$$R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}$$

avremo ancora

$$(2) \quad \begin{cases} \cos \alpha = \frac{X}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} & \cos \beta = \frac{Y}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \\ \cos \gamma = \frac{Z}{\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}} \end{cases}$$

Si dicano x, y, z , le coordinate del punto di applicazione della risultante e si faccia

$$\Sigma P'(x' \cos \beta - y' \cos \gamma) = L$$

$$\Sigma P'(x' \cos \gamma - z' \cos \alpha) = M$$

$$\Sigma P'(y' \cos \alpha - x' \cos \beta) = N$$

avremo

$$(3) \left\{ \begin{array}{l} L - R(x \cos \beta - y \cos \gamma) = 0 \\ M - R(x \cos \gamma - z \cos \alpha) = 0 \\ N - R(y \cos \alpha - x \cos \beta) = 0 \end{array} \right.$$

ossia

$$(4) \left\{ \begin{array}{l} L - Yz + Zy = 0 \\ M - Zx + Xz = 0 \\ N - Xy + Yx = 0 \end{array} \right.$$

Se da queste equazioni si eliminino le coordinate x, y, z , avremo

$$XL + YM + ZN = 0$$

per l'equazione di condizione dell'esistenza della risultante come si è avuto (din. §. 84).

Avendo luogo l'antecedente equazione i valori delle coordinate si presenteranno sotto la forma di $\frac{0}{0}$, perchè la risultante potendo essere applicata ad un punto qualunque della sua direzione, debbono essere indeterminate le sue coordinate, e le tre equazioni (4) sono l'equazioni delle proiezioni della risultante sopra i tre piani coordinati.

8. Caso delle forze parallele dedotto dalle equazioni antecedenti. Supponiamo, che le forze P', P'', P''' ec. siano parallele. In tal caso $\alpha' = \alpha'' = \alpha''' =$ ec. $\beta' = \beta'' = \beta''' =$ ec. $\gamma' = \gamma'' = \gamma''' =$ ec. e l'equazioni (1) (§. 7) ci daranno

$$\cos\alpha'\Sigma P' = X, \cos\beta'\Sigma P' = Y, \cos\gamma'\Sigma P' = Z'$$

dunque dalle (2) (§. 7) avremo

$$\cos\alpha = \cos\alpha', \cos\beta = \cos\beta', \cos\gamma = \cos\gamma'$$

quindi la risultante sarà parallela alle componenti parallele. Avendosi poi $R\cos\alpha = X$ avremo

$$R\cos\alpha = \cos\alpha' \Sigma P'$$

ossia $R = \Sigma P'$: cioè la risultante è uguale alla somma delle componenti. Finalmente le (3) ci danno

$$R(x\cos\beta - y\cos\gamma) = \Sigma P'(x'\cos\beta - y'\cos\gamma)$$

$$R(x\cos\gamma - z\cos\alpha) = \Sigma P'(x'\cos\gamma - z'\cos\alpha)$$

$$R(y\cos\alpha - x\cos\beta) = \Sigma P'(y'\cos\alpha - x'\cos\beta)$$

da queste abbiamo

$$\cos\beta(Rz - \Sigma P'z') = \cos\gamma(Ry - \Sigma P'y')$$

$$\cos\gamma(Rx - \Sigma P'x') = \cos\alpha(Rz - \Sigma P'z')$$

$$\cos\alpha(Ry - \Sigma P'y') = \cos\beta(Rx - \Sigma P'x')$$

Nella indipendenza degli angoli α, β, γ , per verificare queste equazioni dobbiamo avere

$$Rz - \Sigma P'z' = 0, Ry - \Sigma P'y' = 0$$

$$Rx - \Sigma P'x' = 0$$

dalle quali

$$x = \frac{\Sigma P'x'}{R}, \text{ ossia } x = \frac{\Sigma P'x'}{\Sigma P'},$$

$$y = \frac{\Sigma P'y'}{\Sigma P'}, \quad z = \frac{\Sigma P'z'}{\Sigma P'}$$

come avemmo (din. §. 40).

CAPO II.

Equilibrio delle forze nelle macchine.

9. Definizione della macchina. Macchina è un mezzo pel quale si modificano le forze nella loro direzione, intensità, e punto di applicazione per produrre la quiete o il moto. Per esempio la girella modifica la direzione della forza e non l'intensità, perchè vedremo, che la forza deve essere uguale al peso da sollevarsi: modifica però la direzione, perchè invece di agire dal basso in alto per sollevare il peso senza questa macchina, con questa agisce dall'alto in basso eon più comodo di chi tira, più sicurezza, ed aggiungendo alla forza muscolare il peso del proprio corpo: e poi a trarre si può impiegare un peso. La leva poi modifica tutto nella forza.

Nella macchina v'è sempre almeno un sostegno o fulcro, le forze da vincersi che si chiamano resistenze e le forze vincenti che si dicono semplicemente forze, o potenze.

10. Attrito. Una resistenza che sempre si aggiunge alla forza o alla resistenza nelle macchine è l'attrito, e di questo fa duopo ora parlare per valutarlo nel nostro capo, che tratta delle forze in equilibrio applicate alle macchine.

L'attrito proviene dall'ingranamento delle prominenze di un corpo nelle cavità di un altro. Dai meccanici si distinguono tre specie di attriti, che provengono da tre diverse maniere di moto: e sono 1° quello di un corpo che striscia radendo un piano: 2° quello di un cilindro che ruota sul piano: 3° quello dell'asse di una ruota, o d'una carrucola; o giri l'asse o giri il cerchio attorno al medesimo.

11. Elementi che influiscono sull'attrito. Gli elementi che possono influire sull'attrito sono 1° la pressione

di cui il corpo grava la superficie sulla quale si muove ;
2° la scabrosità delle superficie che scambievolmente stropicciansi dipendente dalla diversa loro natura e preparazioni, 3° la durata del loro scambievole contatto, 4° l'estensione delle medesime superficie, 5° la velocità del moto.

12. **Attrito della prima specie.** Dalle sperienze si ricava, che in pari circostanze l'attrito è proporzionale alla pressione. Sia Q la pressione, potrà l'attrito esprimersi per fQ , essendo f costante nelle diverse pressioni. Pare però dalle sperienze che il coefficiente f scemi alcun poco nelle grandi pressioni. Tuttavia la differenza è piccola, e per lo più può trascurarsi con sicurezza.

13. Varia l'attrito secondo la qualità della superficie. Fra legni nuovi, abbenchè piallati, egli val circa la metà della pressione, fra metalli $\frac{1}{4}$, fra legni e metalli $\frac{1}{5}$

14. Quando le superficie sono logore per lungo stropicciamento l'attrito si fa minore. Così nei legni dalla metà del peso riducesi ad un terzo. L'attrito fra legni riesce anche molto minore quando le fibre s'incontrano ad angolo retto, per la qual circostanza l'attrito si riduce ad un quarto della pressione.

15. Spalmando la superficie con materia untuosa si ottiene un considerabil vantaggio, e tanto più quanto l'unto ha più di consistenza. Così l'unto di sego fresco scema l'attrito circa per metà. E quando anche l'unto non si rinnovi, finchè resta nelle superficie alcun poco della vecchia untuosità, dura tuttavia il vantaggio, potendo considerarsi l'attrito delle superficie untuose siccome medio fra quelle delle asciutte, e quelle di fresco spalmate.

16. Varia l'attrito secondo la durata del contatto e cresce per un certo tempo sin che giunge al suo valor massimo e costante. Questo tempo è d'un minuto o due nei legni; brevissimo ed impercettibile nei metalli: ma nei legni so-

vrapposti a metalli dura parecchi giorni. Si prolunga molto coll' ungere la superficie. Generalmente è maggiore quando le superficie sono estese, e quando sono eterogenee.

17. L'attrito poco o nulla dipende dall'ampiezza della superficie. Ben è vero che quando la pressione è piccola, e la superficie molto estesa la resistenza trovasi alquanto maggiore massimamente se si frapponga intonaco untuoso: ma questo aumento molto irregolare, ed incostante nasce probabilmente dalla coesione.

18. Havvi un modo di ricercare il coefficiente f dell'attrito per un dato corpo. E questo consiste nel trovare per esperienza quel più rapido piano su cui quel corpo possa per se medesimo sostenersi. Declini questo piano della verticale dell'angolo m ; sarà $f = \cot.m$. Infatti il corpo tende a scendere con forza $g \cos.m$, essendo g la gravità, e preme il piano con forza $g \sin.m$: dunque l'attrito è $f g \sin.m$, e poichè esso equilibra la forza che fa discendere il corpo sarà $f g \sin.m = g \cos.m$, ossia $f = \cot.m$.

19. Così essendosi trovato che i mattoni si sostengono su d'un piano mediocrementemente liscio, purchè questo declini dalla verticale di gradi 50, sarà per li mattoni $f = 0.8$ in circa.

20. Le terre smosse non si sostengono a piombo, e prendono naturalmente un declivio dalla verticale di gradi 60 se sono terre sabbiose e sciolte; di gradi 54 se sono terre forti. Adunque per l'attrito delle terre fra loro il valore di f sarà fra 0.58, e 0.73.

21. L'attrito dei corpi in moto generalmente parlando è minore di quello che convien superare nel primo distacco dell' uno dall' altro. Non è però uguale in tutti il divario. Nei legni essendo l'attrito del primo distacco la metà della pressione, l'attrito nel moto continuo non n'è più che l'ottava parte. All'incontro nei metalli v'è sensibil divario fra il primo attrito ed il secondo. Bensì fra legni e metalli ne' quali abbiamo veduto essere il primo attrito un quinto

della pressione, il secondo in un moto lento e continuo si riduce ad un dodicesimo. Nei legni e molto più nei metalli l'attrito si mostra costante, ed affatto indipendente dalla velocità. Non così fra i legni e metalli: quivi l'attrito col crescere della velocità si aumenta sensibilmente quantunque in una proporzione assai minore.

22. Ben è vero, che quando i legni sono logori per continuato stropicciamento, e specialmente se il carico è grave, e la superficie piccola, la velocità non influisce più tanto sull'attrito.

23. **Attrito di seconda specie.** In pari circostanze l'attrito di seconda specie è prossimamente in ragione inversa del diametro del cerchio, o cilindro rotante.

24. Varia ancora questo attrito secondo le diverse materie che formano il cilindro o il piano. Sembra però, che l'untuosità non giovi punto a scemarlo.

25. Rotando un cilindro di gnaia del raggio di $m.0,081$ sopra un piano di rovere risultò dalla sperienze $f=0,006$: e rotando il medesimo sopra di un piano d'olmo si trovò $f=0,010$.

26. **Attrito della terza specie.** In pari circostanze trovasi l'attrito prossimamente proporzionale alla pressione, dico prossimamente, perchè sotto le grandi pressioni l'attrito diminuisce alcun poco.

27. Varia l'attrito secondo la materia che forma l'asse ed il suo cerchio. Essendo l'asse di ferro, ed il cerchio di rame l'attrito è un settimo della pressione: ma quando l'asse ed il cerchio sono di legno si ha minor stropicciamento, e l'attrito è un dodicesimo della pressione.

28. Qui pure si ottiene gran vantaggio dallo spalmare la superficie. L'unto recente di sego scema l'attrito della metà; esso poi cresce a misura che l'untuosità si consuma: ma ciò fa più lentamente, che nell'attrito della prima specie.

29. L'attrito degli assi non dipende punto dalla velocità:

almeno essa v' influisce sì poco, che nella pratica può aversi per nulla.

30. La leva. Si è detto che nelle macchine vi è sempre almeno un fulcro, resistenza, e forza o potenza: posto ciò la macchina la più semplice è quella dove si ha il minimo di ciò che è richiesto per esser tale, e questa è la leva, che è una verga inflessibile non pesante sostenuta da un fulcro con una forza ed una resistenza. Questa si vede



nella figura disegnata, nella quale AFB è la verga, F il punto d'appoggio o fulcro, e P, e Q sono le due forze, una delle quali sarà la resistenza.

31. Distinzione delle leve. Nella leva si distinguono due casi, il primo è quello in cui il fulcro è fra la forza e la resistenza, l'altro in cui il fulcro è fuori delle due forze. La prima leva si dice *leva di primo genere*. Il secondo caso si divide in due, perchè il fulcro o è più prossimo alla forza, o alla resistenza. Se è più prossimo alla resistenza, o se questa è fra la forza ed il fulcro la leva si dice *di secondo genere*. *Leva di terzo genere* è quella, in cui la forza è fra il fulcro e la resistenza. Abbiamo esempi di queste tre specie di leve. Per es. la bilancia, la stadera, le forbici che tagliano sono leve di primo genere: i pedali dell'organo sono leve di terzo genere: dello stesso genere è il braccio che sostiene un peso tenuto in mano. Il ponte levatoio è leva del secondo genere. Si vede chiaro che se il fulcro è tra la resistenza, che sia un peso, e la forza deve essere al di sotto della leva: come anche deve essere al disotto se essendo fuori e più vicino al peso, e ciò perchè questo tende al basso: quando poi è più vicino alla potenza deve essere al di sopra della

leva perchè la potenza è diretta all'alto per sostenere il peso.

32. La teoria delle coppie si presta subito alla condizione dell'equilibrio delle forze applicate alla leva, ed a trovare lo sforzo da esse fatte sul fulcro. Siano le due forze P , e Q che siano nel piano che passa nel fulcro, e che taglia la leva nella sua lunghezza. Siano esse traslocate parallelamente a se stesse onde essere applicate nel fulcro, e siano in tal caso rappresentate da P' , Q' ; avremo per questo traslocamento due coppie $(P, -P)$ di braccio FH , e $(Q, -Q)$ di braccio FI , essendo FH , FI due normali calate dal fulcro sulle direzioni delle forze proposte.

33. Le due P' , Q' che di valore sono P , Q si annulleranno nel fulcro: ma vi faranno uno sforzo rappresentato dalle diagonale FR del parallelogrammo sopra di esse costruito.

34. Le due coppie poi di rotazione contraria dovranno dare una coppia risultante nulla, al che si richiede, che le due coppie avute essendo contrarie siano uguali cioè siano uguali i loro momenti: dunque $P \cdot FH = Q \cdot FI$ sarà la condizione dell'equilibrio: cioè affinché due forze applicate ad una leva come si è detto siano in equilibrio è necessario, che siano in ragione inversa delle normali calate dal fulcro sulle loro direzioni.

35. Questa proposizione vale per tutte e tre le specie di leve, lo che è evidentissimo.

36. **Carrucola.** La Carrucola o girella con perno fisso, che perciò si dice carrucola fissa, è leva di primo genere.



Le forze P, Q applicate agli estremi di fune tangente nei punti A, B , ove si stacca dalla gola della detta girella, sono applicate ad angolo retto ad una verga angolare ACB : quindi per questa non

occorre calare le normali dal fulcro essendo normali i raggi AC , CB : ora i momenti uguali $P \cdot CA$, $Q \cdot CB$ ci danno, che le due forze sono sempre uguali. Non è però che la pressione fatta sul fulcro sia sempre la stessa, perchè questa sarà tanto maggiore quanto più le forze tenderanno al parallelismo. Infatti pel traslocamento che si faccia delle due forze P , Q in C secondo la teoria delle coppie abbiamo due forze P' , Q' , che sono P , e Q , sulle quali compito il parallelogrammo ci danno la diagonale CR per rappresentare il detto sforzo contro il fulcro C . Ora questa diagonale tanto più cresce quanto si fa minore l'angolo delle due componenti P' , Q' , o delle due proposte P , Q : quindi sarà la massima, cioè uguale alla loro somma, quando le dette forze saranno parallele. Si vede poi essere $P':R=CP':CR=CA:AB$: cioè essendo una delle due forze rappresentata in intensità dal raggio della girella, la risultante o pressione sarà rappresentata dalla corda dell'arco di circolo avviluppato dalla fune: quindi la pressione sarà massima quando la forza avviluppata sarà mezza circonferenza, nel qual caso essa sarà il doppio di una delle due forze come la corda della mezza circonferenza è il doppio raggio.

38. **Girella mobile.** Questa si vede nella figura qui



innanzi, e si vede la maniera con cui la forza Q si equilibra col peso P . Servendoci dell' antecedente proporzione, che sussiste nel nostro caso, si vede che essendo l'intensità della potenza

rappresentata dal raggio della carrucola, il peso da sostenersi è rappresentato dall'arco avviluppato dalla fune: d'onde si ricava, che il massimo peso è sostenuto da una data forza quando i due capi di fune l'uno fisso e l'altro tenuto dalla potenza sieno paralleli; perchè in questo caso il peso è doppio della forza.

39. **Bilancia.** La bilancia è una leva di primo genere. In un piatto si pone la merce da pesarsi, e nell' altro un peso noto che gli faccia equilibrio. Ciò che si vuole dalla bilancia è che essendo uguali, il peso della merce ed il noto posto nell'altro piatto, essa mostri l'equilibrio avendo l'asta che sostiene i piatti orizzontale. In questo caso abbiamo forze parallele, e sono i due pesi nei due piatti, ed il peso della bilancia scarica riconcentrato nel suo centro di gravità. L'equilibrio vuole, che il centro di gravità di questi pesi passi pel fulcro F, affinchè la risultante passando per questo vi si annulli, ossia si richiede, che la somma dei momenti di questi pesi rispetto (din. §. 33.) il punto F sia zero. Si dica M il momento della bilancia scarica: sia P il peso noto e P' quello della merce. Sia a il braccio della bilancia dalla parte di P, e b il braccio dalla parte di P'. Per la detta uguaglianza dei momenti dovremo avere $P \cdot a + M = P' \cdot b$ dove il momento della bilancia scarica si è posto dalla parte di P, perchè si è supposto, che il centro di gravità sia dal lato della detta P. Trasportando, e supponendo $P' = P$, come si richiede, sarà $P(b - a) = M$. La M è costante, e la P è variabile a piacere, dunque affinchè sussista l'equazione dovrà essere $b - a = 0$, $M = 0$. Da questa uguaglianza si ricavano due condizioni per l'esattezza della bilancia. La prima, è che i suoi bracci siano uguali. La seconda, che sia in equilibrio essendo scarica. Questa seconda condizione facilmente si verifica. Per verificare la prima si tramutino i pesi nei due piatti, e se i bracci siano disuguali la bilancia squilibrerà. Imperocchè l'equilibrio evidentemente è stato prodotto da questo, che il peso minore era dalla parte del braccio maggiore, e viceversa: dunque tramutandosi i pesi, la bilancia traboccherà dalla parte del lato maggiore a cui si è trasportato il peso maggiore.

39. Non volendosi brigare dell'osservazione dell'uguaglianza dei bracci, e neppure dell'equilibrio della bilancia

scarica si potrà collocare successivamente la merce ed il peso marcato in uno stesso piatto, e nell'altro un peso eziandio incognito, che faccia equilibrio con ambedue. Ciò si otterrà prima equilibrando la merce, poi tolta questa ponendovi tanto peso marcato quanto è necessario per equilibrare il peso nell'altro piatto. Egli è evidente che il peso marcato, e la merce trovandosi nella stessa posizione in equilibrio con un terzo saranno uguali qualunque sia l'inesattezza della bilancia. Così una bilancia con un braccio lungo, quando si pesi come testè si è detto, può essere utile, perchè questo braccio renderà più sensibile lo squilibrio, specialmente se la sua estremità termini in forma d'indice, che percorra un quadrante graduato. Del resto se una merce in una bilancia difettosa a causa della disuguaglianza dei bracci si ponga in equilibrio con due pesi p, p' collocata prima in un piatto, e poi in un altro, il suo peso si troverà estraendo la radice seconda dal prodotto dei due pesi falsi. Infatti quando la merce m è collocata dalla parte del braccio a , e la p dalla parte di b , avremo $ma = pb$: e nel tramutamento della merce sarà $mb = p'a$. Moltiplicando le due uguaglianze e togliendo il fattore comune ab sarà $m^2 = pp'$, ed $m = \sqrt{pp'}$.

40. Condizioni per la perfezione della bilancia.



Supponiamo che aggiungendosi il pesetto p al peso P collocato nel piatto D passi il giogo della situazione AOB alla aOb . Chiamiamo l'angolo $AOa = BOb = GOG = \psi$; l'angolo $AOF = BOF = \alpha$.

Si conducano dei punti a, b, g le perpendicolari ah, bk, gg' , e si chiami M il peso della bilancia scarica. Essendo la bilancia in equilibrio nella situazione aOb dovrà essere

$$(a) \quad P.ah + M.gg' = (P + p)bk$$

Ora abbiamo

$$ah = AO \sin(\alpha + \psi) = AO \sin \alpha \cos \psi + AO \sin \psi \cos \alpha =$$

$$AF \cos \psi + OF \sin \psi$$

$$bk = AO \sin(\alpha - \psi) = AO \sin \alpha \cos \psi - AO \sin \psi \cos \alpha =$$

$$AF \cos \psi - OF \sin \psi$$

$$gg' = OG \sin \psi$$

Fatte le sostituzioni nell'equazione dell'equilibrio (a) si troverà

$$\tan \psi = \frac{p \cdot AF}{(2P + p)OF + M \cdot OG}$$

Se dicasi M' il peso della bilancia carica sarà

$$M' = M + 2P + p,$$

d'onde avremo

$$\tan \psi = \frac{p \cdot AF}{M' \cdot OF + M \cdot FG}$$

Sarà dunque la bilancia tanto più mobile, o come si suol dire tanto meno *pigra*, quanto più lunghe saranno le sue braccia; quanto più vicini saranno fra loro i tre punti O, F, G, e quanto sarà meno caricata. Se fosse $OF = 0$ verrebbe

$\tan \psi = \frac{p \cdot AF}{M \cdot FG}$, ed allora l'agilità della bilancia è la stessa

sotto qualunque carico. Se fosse insieme $OF = 0$, ed $FG = 0$ cosicchè i tre punti O, F, G coincidessero verrebbe

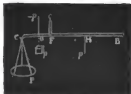
$\tan \psi = \frac{p \cdot AF}{0}$ cioè l'angolo ψ di 90° , ed allora per ogni

piccolo disquilibrio l'asta della bilancia traboccherebbe d'un quarto di circolo. Che se OF, FG fossero negative $\tan \psi$ sarebbe negativa e l'asta traboccando trascorrerebbe oltre il quarto di cerchio. Ognun vede che queste costruzioni sarebbero viziose, e la bilancia perciò si dice *matta*.

41. **La stadera.** La stadera è una leva di primo genere che serve a pesare le merci come la bilancia: ma differisce da questo, che nella bilancia essendo i bracci uguali il peso deve essere uguale alla merce, e perciò si deve variare il peso per li diversi pesi delle merci. Nella stadera però essendo fisso il braccio che è dalla parte della merce, è di lunghezza qual fa comodo il braccio, sul quale scorre un determinato peso che si chiama il *romano*.

42. Per questa disposizione si vede, che alle differenti merci può fare equilibrio lo stesso peso, e ciò perchè ponendosi questo a diverse distanze dal fulcro produce l'equilibrio col suo momento. Quindi se p è il peso costante ed x la sua distanza dal fulcro che produce l'equilibrio, lo produrrà pel momento px . Se dunque si conoscerà una distanza $x = d$, in cui il peso p faccia equilibrio con una merce di peso p , il px del romano portato ad un'altra distanza x dal fulcro, e che faccia equilibrio con un'altra merce ci farà trovare il peso di questa nella ripetizione del p fatta da x nel detto momento.

43. **Graduazione della stadera.** Per vedere come ciò



si ottenga si consideri la stadera scarica. Si supponga che collocato in o il romano si abbia l'equilibrio: ciò vuol dire che la stadera dalla parte B , cioè a dritta di chi la guarda del fulcro agisce con un

momento che è $p \cdot oF$. Si dica r il braccio CF . La oF sia d , sia finalmente m il peso della merce. Posta questa nel piatto P , il romano p formi l'equilibrio collocato in H , e sia come innanzi $HF = x$. Per l'equilibrio i momenti da una parte sono uguali ai momenti dall'altra: avremo dunque

$$(1) \quad m \cdot r = p \cdot d + p \cdot x.$$

Si voglia ora la distanza x dove il peso sia uguale alla

merce avremo

$$pr = p.d + px$$

dunque $x = r - d$: quindi se sul braccio FB si fa un segno H a distanza da F uguale al braccio minore r diminuito della distanza d , ove era il romano per produrre l'equilibrio nella bilancia scarica, la merce pesa quanto il romano: perciò se questo sia una libra, il romano collocato in quel segno H si equilibra colle merci di una libra. Supponiamo che il romano sia portato nel braccio lungo a distanza nr dal detto punto H, allora disterà da F di $r - d + nr$ o di $(n+1)r - d$. Si ponga questo valore in (1) in luogo di x , ed avremo

$$m.r = p(n+1)r, \text{ ossia } m = (n+1)p$$

cioè la merce sarà tante libbre p per quante divisioni il romano avrà percorse, queste divisioni cominciando da O, e tutte di lunghezza r , cioè il braccio minore. Se queste lunghezze si suddivideranno si avranno le frazioni di una libra di denominatori il numero di queste divisioni. Se per esempio si divideranno in 12 parti avremo le oncie.

44. La teoria della stadera si ritrae da quella delle coppie. Sia collocato il peso p in O per produrre l'equilibrio nella stadera scarica. Si ponga un peso p nel piatto P: si deve vedere qual peso o dove si deve portare sul braccio FB per avere l'equilibrio.

45. Si trasporti il p posto nel piatto ad essere applicato al fulcro F, vi si eliderà premendolo, e ne nascerà una coppia $(p, -p)$ di braccio $CF = r$. Per equilibrarla vi è bisogno di una coppia uguale e contraria $(p, -p)$ di braccio r . Questa s' intenda applicata all' asta della stadera in guisa che la $-p$ sia in O agente all' insù che eliderà la p ivi applicata, l'altra p agente all' ingiù in H, essendo $HO = r$ sarà quella che equilibrerà la forza p applicata in C. Ciò che combina coll' antecedente teoria, nella quale appunto un

peso p collocato in H a distanza $Ho=CF=r$ equilibrava una merce sostenuta da C di peso p .

46. Condizione generale per l'equilibrio di rotazione intorno ad un asse. Poichè una gran parte di macchine presentano l'equilibrio di rotazione intorno ad un asse diamone la condizione generale. Si supponga dunque un sistema qualunque di forze che tendano a produrre due rotazioni contrarie intorno ad un asse. In primo luogo, affinchè queste forze producano tutta la loro azione nel produrre la rotazione, debbono giacere in piani normali all'asse: perchè considerandone una obliqua rispetto un piano normale si potrà sempre decomporre in due l'una giacente nel piano, e l'altra normale ad esso o parallela all'asse. La componente parallela non produce moto di rotazione, ma tende a far scorrere il sistema lungo l'asse. Dopo ciò considereremo le forze del sistema in piani normali all'asse, o in piani paralleli. Muovendosi queste forze parallelamente a se stesse siano applicate all'asse: queste elidendovisi producono sforzi contro l'asse. Dal detto traslocamento sorgono (dinamica §. 79.) tante coppie quante sono le forze del sistema, ogni coppia di leva uguale alla distanza della forza dall'asse, e quindi di momento la forza moltiplicata per la sua distanza dall'asse, o per la normale calata dall'asse sulla sua direzione. Elidendosi le forze traslocate rimane per la condizione dell'equilibrio (din. §. 82.) che la coppia risultante sia zero, o che il suo momento sia zero: ma la coppia risultante di altre in piani paralleli, e tendenti a rotare in sensi opposti ha per momento la differenza dei momenti delle coppie componenti (din. §. 72.): dunque per l'equilibrio di rotazione la condizione richiesta è che la differenza dei momenti delle forze sia zero, o che la somma dei momenti delle forze rotanti in un senso sia uguale alla somma dei momenti delle forze rotanti in senso opposto. Cioè la somma delle forze agenti in un senso mol-

tiplicato per le normali calate su d'esse dall'asse deve essere uguale alla somma delle forze agenti in senso opposto moltiplicate per le uormali calate dall'asse sulle loro direzioni.

47. Equilibrio nell'argano, o burhera. La teoria ora esposta ha un'applicazione all'argano, o burhera. In questa macchina come si vede nella figura il peso è appiccato ad



una fune che è tangente al cilindro o tamburo, la forza ad un manubrio, cui deve essere normale, perchè se gli fosse obliqua si decomporrebbe in due, l'una secondo il manubrio, e l'altra

ad essa normale, la prima non tenderebbe a produrre la rotazione, ma sarebbe diretta a premere coll'asse del cilindro il sostegno o a tentar di toglierlo da esso: il tutto a sconcerto dell'equilibrio. Il peso, come si vede, si può considerare come attaccato normalmente all'estremità del raggio del cilindro: dunque forza, e peso si trovano in piani normali all'asse, e le normali condotte da questo sulle loro direzioni sono la lunghezza del manubrio, ed il raggio del cilindro. Quindi se si dica P il peso, F la forza, r il raggio del cilindro, ed l la lunghezza del manubrio, avremo per l'equazione dell'equilibrio, secondo ciò che si è detto, $Pr = Fl$. Lo sforzo che sosterrà l'asse del cilindro sarà la risultante del peso e della forza, essendo queste le traslocate in esso parallelamente a se stesse.

48. Dall'equazione antecedente si vede che si richiede tanto meno di forza per sostenere un peso tanto più grande quanto è più lungo il manubrio, e quanto è più piccolo il raggio del cilindro.

49. Macchine composte. Colla combinazione della girella fissa e mobile, e dell'argano sorgono macchine composte. Dalla girella sorgono tre specie di combinazione.

50. **Prima specie di combinazione delle girelle.**



Questa prima combinazione è mostrata dalla figura. In questa sono tre capi di fune attaccati in una estremità ai punti fissi c' , c'' , c''' , e che passano per tre girelle. Colle altro loro estremità i detti capi di fune sono attaccati al centro della girella superiore, finchè la terza fune passata per la terza girella mobile passa per la gola di una girella fissa

A così disposta rispetto la prima che il capo di fune $A'''A$ sia parallelo agli altri paralleli fra loro. Al centro della girella la più bassa A' è attaccato il peso P , ed all'estremo della fune pendente dalla girella fissa è attaccato il peso p , o una forza verticale, che si equilibra col peso P . Si deve trovare in questa macchina la relazione fra p e P . Ciò è facile.

Infatti la fune in A' sostiene il peso, o è tesa da $\frac{P}{2}$ (stat. §. 38) e

questo è il peso che agisce al centro della girella superiore:

dunque lo sforzo o tenzone della fune A'' è $\frac{P}{4}$, o $\frac{P}{2^2}$, che sarà

il peso al centro della terza girella superiore: Dunque la

tenzone della fune in A''' sarà $\frac{P}{2^3}$: dunque se sono n le

girelle mobili, la tenzone della fune che passando per la suprema girella passa per la gola della fissa, con cui è in

equilibrio il peso p che perciò gli è uguale sarà $\frac{P}{2^n}$: dun-

que $p = \frac{P}{2^n}$ rapporto domandato.

51. Se A' , A'' , A''' , ec. siano i pesi delle girelle indicate dalle stesse lettere nella figura dei quali si voglia tener conto, in tal caso il peso nel centro della girella A' sarà $P + A'$: dunque il peso al centro della girella A'' sarà

$$\frac{P}{2} + \frac{A'}{2} + A''.$$

Il peso al centro della girella A''' sarà

$$\frac{P}{2^2} + \frac{A'}{2^2} + \frac{A''}{2} + A'''.$$

Il peso al centro della girella A^{IV} sarà

$$\frac{P}{2^3} + \frac{A'}{2^3} + \frac{A''}{2^2} + \frac{A'''}{2} + A^{IV};$$

dunque il peso al centro della girella $A^{(n)}$ sarà

$$\frac{P}{2^{n-1}} + \frac{A'}{2^{n-1}} + \frac{A''}{2^{n-2}} + \frac{A'''}{2^{n-3}} \dots + A^{(n)}.$$

Quindi il capo di fune che passa per questa girella, e che poi dovrà passare per la gola della girella fissa fa uno sforzo

$$\frac{P}{2^n} + \frac{A'}{2^n} + \frac{A''}{2^{n-1}} + \frac{A'''}{2^{n-2}} \dots + \frac{A^{(n)}}{2},$$

che sarà uguale a p dunque

$$P + A' + A'' \cdot 2 + A''' \cdot 2^2 + A^{IV} \cdot 2^3 \dots + A^{(n)} \cdot 2^{n-1} = 2^n p$$

Se i pesi delle girelle siano uguali ad A avremo

$$(a) \quad P + A (1 + 2 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{n-1}) = 2^n p$$

Abbiamo il teorema

$$\frac{(a^n - b^n)}{a - b} = a^{n-1} + a^{n-2} b + a^{n-3} b^2 \dots + a b^{n-2} + b^{n-1}.$$

Se in questa si faccia $a = 2$, $b = 1$ avremo, che l'equazione (a) diventerà

$$P + A (2^n - 1) = 2^n p, \text{ e } P = 2^n p - A (2^n - 1):$$

dunque quanto è più grande il peso comune A della girelle tanto più deve essere piccolo il P e se

$$2^n p = A (2^n - 1)$$

il P è zero, cioè il sistema si mantiene da se in equilibrio.

52. **Seconda specie di combinazione di girelle.** Il secondo caso della combinazione delle girelle è mostrato



dalla figura qui posta. In questa combinazione gli estremi dei capi di fune che passano per le girelle non sono fissi nello spazio, come nel caso antecedente, ma sono attaccati al peso P nei punti c'' , c'' , c' . Sia il peso p attaccato all'ultimo capo di fune che faccia equilibrio con P , è da trovarsi il loro rapporto. Il

peso p produce in c' uno sforzo uguale a p : e questa è la parte di P sostenuta dalla fune attaccata c' . I p che agiscono su i due capi di fune che passano per la gola della girella A' vi producono uno sforzo $2p$: dunque le due forze agenti sulli due capi di fune che passano per A'' sono $2p$ e questo è lo sforzo fatto in c'' , o la parte di peso P sostenuto dalla fune che è attaccata in c'' . Se i due capi di fune che passano per la gola di A'' sostengono ognuna la forza $2p$, la fune che sostiene A'' , porterà il peso $2^2 p$: dunque i due capi di fune che passano per la gola di A''' fanno forza, $2^2 p$, e questo sarà lo sforzo in c''' , o la parte di peso P sostenuto: dunque se sono n le girelle, la fune che passa per la gola della girella $A^{(n)}$ sosterrà del peso la parte $2^{n-1} p$. Dopo ciò avremo, raccogliendo tutte le parti del peso sostenuto

$$P = p + 2p + 2^2 p \dots + 2^{n-1} p = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 \dots + 2^{n-1}) p$$

ossia

$$P = (2^n - 1) p$$

55. Terza specie di combinazione delle girelle.

Nelle due specie antecedenti avevamo diversi capi di fune, e di ognuno di questi un'estremità era fisso o in punti dello spazio, o al sostegno del peso. Nell'attuale, come si vede nella fi-



gura qui innanzi, è una fune sola fissata in una estremità, che passa per le girelle mobili ed altrettante fisse avendo i capi di fune tra una girella fissa e l'altra mobile paralleli, e ciò per acconci diametri delle girelle. All'altro estremo della detta fune che pende dall'ultima girella fissa è attaccato un peso o forza verticale che è in equilibrio col peso

attaccato al centro della più bassa girella mobile. Le girelle fisse e mobili sono in due casse, e sono disposte o l'una sotto l'altra o l'una parallelamente all'altra in uno stesso asse. Ognuna di queste unioni si chiama una taglia. In questa unione di girelle, la fune è per tutto tesa ugualmente, perchè se uno dei capi fosse più teso degli altri tirerebbe a sé gli altri capi che fanno con esso una sola fune, e che sono perfettamente scorrevoli nelle girelle per le cui gole passano. Ora è evidente, che le tenzioni delle funi che vanno alle girelle nella taglia mobile sono sforzi per sostenere il peso: dunque questo peso è uguale ad una tensione delle funi ripetuta pel numero delle funi che vanno alle girelle della taglia mobile, ma ognuna di queste tensioni è il peso p che tende l'ultimo capo di fune: dunque il peso P è uguale al peso p ripetuto pel numero dei capi di fune che vanno alle girelle della taglia mobile: dunque se sono n questi capi di fune sarà $P = np$. Se poi A sia il peso della taglia mobile si dovrà questo aggiungere a P ed avremo $P + A = np$, e $P = np - A$.

cano poi s, s', s'' gli sforzi dei contrasti fra i denti detti poco fa. Se si ritenga, che P sia la potenza applicata alla fune della prima ruota, e Q il peso sostenuto dalla fune pendente dal cilindro dell'ultima ruota, avremo per gli equilibri parziali di ciascuna ruota col suo rocchetto considerato l'insieme come un argano

$$PR = sr, sR' = s'r', s'R'' = s''r'', s''R''' = Qr''.$$

Moltiplicando queste equazioni, e togliendo il fattore comune avremo

$$PRR'R''R''' = Qr'r''r''',$$

dalla quale

$$(a) \quad \frac{P}{Q} = \frac{rr'r''r'''\dots}{RR'R''R'''\dots} :$$

dunque in un sistema di ruote dentate la condizione dell'equilibrio è che la *potenza stia al peso o resistenza come il prodotto di tutti i raggi dei rocchetti è al prodotto di tutti i raggi delle ruote*. Da ciò si ricava come sia favorevole alla forza la grandezza dei raggi delle ruote, e la piccolezza dei raggi dei rocchetti.

58. Uso dell'equazione dell'equilibrio delle ruote dentate. L'equazione (a) serve per determinare un elemento qualora siano dati gli altri, affinché esista l'equilibrio. Ma può servire anche in vari casi di problemi indeterminati. Si domandi come si possa equilibrare un peso di 30000 libbre con una forza di sessanta. In questo caso la (a), essendo

$$\frac{Q}{P} = 500, \text{ diverrà } \frac{RR'R''\dots}{rr'r''\dots} = 500$$

dalla quale si deve ricavare il numero delle ruote, i loro raggi, o quelli dei rocchetti. Se il 500 si spezza nei fattori

4, 5, 5, 5 potranno farsi a questi uguali i fattori

$$\frac{R}{r}, \frac{R'}{r'}, \frac{R''}{r''}, \frac{R'''}{r'''};$$

in questa guisa fra le diverse maniere con cui si può stabilire l'equilibrio vi è questo di far la macchina di quattro ruote, in una delle quali il raggio del rocchetto sia il quarto di quello della ruota, e nelle altre tre ne sia il quinto.

59. Equazione per i giri delle ruote. Si vedrà che le ruote non fanno il loro giro intero nello stesso tempo. Imperciocchè supposto che la ruota B sia fornita di 100 denti, ed il rocchetto c di 10 a ciascun giro della ruota C o del rocchetto c la B non ne fa che il decimo: in guisa che vi vogliono 10 giri del rocchetto c, onde B faccia un giro. Siano dunque cominciando da C $q', q'', q''' \dots q^{(n)}$ i numeri dei denti delle ruote, $k', k'', k''' \dots k^{(n)}$ i numeri delle ale dei rocchetti; ed $N', N'', \dots N^{(n)}$ i numeri dei giri delle ruote nello stesso tempo. Dopo N' giri della prima ruota il suo rocchetto avrà fatto passare $N' k'$ ale fra i denti della seconda ruota. Similmente questa ruota facendo nello stesso tempo N'' giri avrà fatto passare $N'' q''$ denti fra le ale del rocchetto della prima ruota: ma si deve essere ingranato lo stesso numero di ali e di denti; dunque dovrà essere $N' k' = N'' q''$. Ragionando allo stesso modo troveremo l'equazioni per tutte le ruote successivamente

$$\begin{aligned} N' k' &= N'' q'' \\ N'' k'' &= N''' q''' \\ N''' k''' &= N^{(n)} q^{(n)} \\ \dots &\dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ N^{(n-1)} k^{(n-1)} &= N^{(n)} q^{(n)} \end{aligned}$$

Moltiplicando queste equazioni e togliendo il fattore comune

avremo

$$(b) \quad N' k' k'' k''' \dots k^{(n-1)} = N^{(n)} q'' q''' \dots q^{(n)}$$

dalla quale si ricava, che i numeri dei giri della prima, e dell'ultima ruota sono fra loro come il prodotto dei numeri dei denti delle ruote è al prodotto del numero delle ale dei rocchetti. Si osserverà che nell'equazione antecedente non entrano nè $k^{(n)}$ nè q' perchè non vi sono denti nella prima ruota, nè ale nell'ultimo rocchetto (§. 56).

60. Uso dell'equazione antecedente. L'equazione (b) serve per risolvere questo problema: di questi quattro elementi, i numeri dei giri della prima e dell'ultima ruota, i numeri dei denti delle ruote, e dei loro rocchetti essendo dati tre, trovare il quarto. Ci possiamo dunque servire di questa equazione per trovare il numero dei denti o delle ale di un sistema di ruote dentate supponendo cogniti i numeri dei giri della prima e dell'ultima ruota. Ma si vede chiaro, essere il problema indeterminato, perchè si deve trovare oltre il numero delle ruote le quantità

$$k', k'' \dots k^{(n-1)}; q'', q''' \dots q^{(n)}$$

essendo dati solamente $N^{(n)}$, ed N' . Dovendo però essere intere e positive le incognite si particolarizza un poco la questione.

61. Per esempio si vogliono impiegare cinque ruote, e fare in guisa che a ciascun giro della prima A alla quale si suppone attaccato un motore Q, l'ultima ne faccia 2800. Sarà nel nostro caso $N^{(n)} = 1$, $N' = 2800$, e l'equazione (b) diventerà.

$$(c) \quad 2800 k' k'' k''' k^{iv} = q'' q''' q^{iv} q^v.$$

Ora ci potremmo dare tutte queste quantità meno una: ma dovendo essere questa un numero intero, per averlo si deve

evitare la frazione; quindi fa duopo lasciarne due indeterminate avvertendo che i valori di q'' , q''' ... sono più grandi di k' , k'' ec. ed interi. Siano per esempio presi per k'' , k''' , k^{iv} i numeri 10, 12, 12, e per q''' , q^{iv} , q^v i valori 80, 80, 84 l'equazione (c) ridotta diventerà $15 k' = 2q''$. Trattata questa equazione col metodo solito delle equazioni indeterminate si trova che k' può avere tutti i numeri pari. Si potrà prendere per es. $k' = 10$, ciò che dà $q'' = 75$. Si vede dunque che tra le altre ipotesi nel proposto sistema di ruote dentate si potranno prendere per i denti e per le ale i numeri seguenti, incominciando dalla ruota del motore.

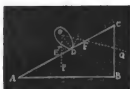
$$q^v = 84 \quad q^{iv} = 80 \quad q''' = 80 \quad q'' = 75$$

e per li rocchetti, cominciando, da quello che ingrana colla, ruota del motore,

$$k^{iv} = 12 \quad k''' = 12 \quad k'' = 10 \quad k' = 10$$

62. Idea delle macchine semplici. Le macchine che abbiamo considerato, cioè la girella e l'argano, sono macchine semplici perchè si riducono alla leva, che si è detta macchina semplice per la ragione addotta nel (§. 30.). Infatti si è veduto che la girella era una verga angolare (§. 36.). L'argano introducendovi la teoria delle coppie si è veduto ridursi ad un sistema (§. 47.) di due coppie in due piani paralleli normali all'asse, che potendosi ridurre in uno stesso piano normale all'asse, si potevano in questo trasportare in guisa, che i loro bracci fossero in linea retta, con che si ha la leva ad una estremità della quale è applicato il peso, ed all'altra estremità la potenza ed il punto d'appoggio sull'asse distante dalla resistenza del raggio del cilindro, e dalla potenza del manubrio. Ci rimane di macchine semplici il piano inclinato.

63. Piano inclinato. Sia il piano inclinato $A B C$, e sulla sua lunghezza in un punto D sia ritenuto un corpo pesante $D O$ da una potenza Q . Per l'equilibrio si richiede che riconcentrato il peso nel centro di gravità O la risultante del peso P e della potenza Q passi pel



punto d'appoggio D , e la sua direzione $O D$ sia normale alla lunghezza del piano inclinato. Deve passare pel punto D , perchè altrimenti il corpo rotirebbe intorno a D da quella parte ove cadesse la risultante. Deve essere normale nel punto D , perchè se fosse obliqua si potrebbe decomporre in due l'una normale, che si eliderebbe sul piano, e l'altra parallela a questo, che farebbe muovere il corpo lungo il piano nella direzione della detta componente.

64. Equazione d'equilibrio nel piano inclinato. Si dica R la risultante del peso e della potenza ed avremo la proporzione (diu. §. 13).

$$P: Q: R = \text{sen} D O F: \text{sen} D O E: \text{sen} E O F,$$

ossia perchè $O D$ è normale ad $A C$ avremo

$$(a) \quad P: Q: R = \cos D F O: \cos D E O: \text{sen}(D F O \rightarrow D E O)$$

Da questa serie di rapporti uguali si ricava

$$(b) \quad P \cos D E O = Q \cos D F O$$

$$R = P \frac{\text{sen}(D F O \rightarrow D E O)}{\cos D F O} =$$

$$\frac{P \text{ sen} D F O \cos D E O}{\cos D F O} \rightarrow P \text{ sen} D E O$$

Ponendo in questa invece di $\frac{P \cos D E O}{\cos D F O}$ la Q , come si ricava

dall'antecedente uguaglianza (b) avremo

$$(c) \quad R = Q \sin DFO + P \sin DEO$$

65. L'equazioni (b), (c) vengono da altra maniera di vedere l'equilibrio delle forze proposte nel piano inclinato. Infatti si scompone la forza P in due l'una secondo il piano inclinato, l'altra ad esso normale; la prima sarà $P \cos DEO$, l'altra $P \sin DEO$. Anche la potenza Q si scompone in due l'una secondo il piano, l'altra normale ad esso: sarà la prima $Q \cos DFO$, e l'altra $Q \sin DFO$. Ora per l'equilibrio le due secondo il piano inclinato debbono distruggersi, dunque dovranno essere uguali, perciò sarà

$$P \cos DEO = Q \cos DFO,$$

le altre due si distruggeranno sul piano e formeranno la pressione $P \sin DEO + Q \sin DFO$, che è la risultante (c) che pure era pressione.

66. **Casi della potenza parallela alla base ed alla lunghezza del piano inclinato.** Sia la potenza Q parallela alla base del piano inclinato. In tal caso ponendo $DEO = PEA = C$ sarà $DFO = A$, e la serie (a) dei rapporti uguali diventerà

$$P:Q:R = \cos A : \cos C : \sin(A+C) = \sin C : \sin A : 1 = AB:BC:AC:$$

cioè la resistenza è alla potenza è alla pressione come la base del piano inclinato, è all'altezza, è alla lunghezza: cioè le forze son come le linee nello spaccato verticale del piano inclinato, alle quali sono normali. Se la potenza è parallela alla lunghezza del piano inclinato avremo $DFO=0$: quindi la (a) diventerà

$$P:Q:R = 1: \sin A: \sin C = AC: BC: AB:$$

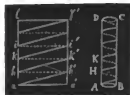
quindi la resistenza sta alla potenza sta alla pressione come la lunghezza del piano inclinato è all'altezza, è alla base.

67. **L'equilibrio nel piano inclinato si riduce all'equilibrio di una leva.** Dal punto D si conducano alle direzioni di P, e Q le normali Dr, Ds. Abbiamo la proporzione (§. 64).

$$P: Q = \text{sen}DOs: \text{sen}DOr = DO\text{sen}DOs: DO\text{sen}DOr = Ds: Dr.$$

Da ciò si ricava che l'equilibrio nel piano inclinato si riduce all'equilibrio intorno ad una leva rDs, o anche EF mobile intorno al fulcro D, perchè si ha la proporzione richiesta (§. 34), che le forze siano in ragione inversa delle normali calate sopra di esse dal fulcro.

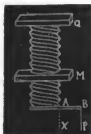
68. **La vite.** Si supponga un rettangolo come a γ' in



figura, ed in questo si supponga condotta dal punto a una retta ah', poi una parallela hk' e ritenendo la stessa distanza ah si conducano da k e dai punti seguenti altre parallele ad hk' fino ad una ultima che incontri il

γ' punto opposto ad a. Se ora questo rettangolo si curvi in cilindro ad applicare la retta al sulla a' γ' vedremo che i due triangoli rettangoli ah'a', hk'h' sulla superficie del detto cilindro daranno una linea, nella quale le basi aa', hk' sono cerchi, e le lunghezze ah', hk' saranno in figura di spira, e l'altezza come kh sarà la distanza di due punti corrispondenti nella spira, situati nella stessa normale alle due circonferenze delle basi del cilindro. La spira si chiama *elice*, e la distanza fra due punti dell'*elice* che si trovano nella stessa verticale a'γ' del cilindro si chiama il *passo dell'elice*. Ora se sopra un cilindro sia di metallo, o di legno visia un risalto sopra il quale dovunque si possa tracciare un *elice* sempre la stessa, questo si chiama *vite*, e la distanza fra due punti che si trovan sulla stessa retta altezza del cilindro si dice *passo della vite*.

69. Si supponga un parallelepipedo M nell'interno con-



formato in cavità nella direzione ed andamento della vite in guisa, che questa combaci colla detta cavità, questo parallelepipedo si chiama *Madre vite*. Si vede che se questa sia fissa, la vite per mezzo di una forza applicata normalmente al manubrio AB, ed in direzione normale all'asse del cilindro della detta vite potrà far muovere la vite dentro la madre vite, in guisa da

farla ascendere ed agendo in un senso contrario da farla discendere. Se poi la vite sia fissa la forza applicata normalmente ad un manubrio conficcato nella madre vite coi due sensi della sua direzione la muoverà a salire e scendere.

70. Condizione dell'equilibrio nella vite. Sia il primo caso, e supposto collocato sulla testa della vite un peso Q si voglia la condizione dell'equilibrio con una forza P applicata al manubrio AB come si è detto. A questo fine si consideri in A a distanza uguale al raggio del cilindro della vite una forza X diretta come P , e ad essa equivalente: dicendo m il manubrio, ed r il raggio del cilindro, la detta equivalenza sarà espressa da $Pm = Xr$. Il peso Q agisce ugualmente in tutti i punti delle vite dentro la madre vite in direzioni verticali; queste sono tante forze verticali sopra piani inclinati di altezza stessa, che è il costante passo delle vite: le basi sono periferie di raggi uguali alle diverse distanze dei detti punti dall'asse del cilindro. Ma per raggio comune si può prendere il raggio r del cilindro, essendo disprezzabili le differenze delle dette distanze. La forza X parallela alle basi dei detti piani inclinati si distribuisce anche essa ugualmente sulle loro lunghezze. Quindi se si dicono q' , q'' , q''' ec. le parti del peso Q , ed x' , x'' , x''' . . le parti della forza X , avremo per gl' indicati piani, dicendo p il passo costante della vite

$x' : q' = p : 2\pi r$, $x'' : q'' = p : 2\pi r$, $x''' : q''' = p : 2\pi r$,
ossia $x' + x'' + x'''$ ec. : $q' + q'' + q'''$ ec. $= p : 2\pi r$, ossia
 $X : Q = p : 2\pi r$, ma avevamo $P : X = r : m$, ossia
 $P : X = 2\pi r : 2\pi m$, dunque moltiplicando e togliendo la X , e
 $2\pi r$ nello stesso rapporto avremo $P : Q = p : 2\pi m$; cioè sta la
potenza al peso come il passo della vite alla circonferenza di
raggio uguale al manubrio. Da ciò si ricava che la forza è
tanto più piccola a sostenere un peso tanto più grande
quanto è più piccolo il passo della vite, e quanto è più
grande il manubrio.

71. Vite perpetua. La vite perpetua è rappresentata dal-



la figura. In questa macchina un peso è
attaccato al cilindro di una ruota dentata
essendo i denti successivamente tratte-
nuti da una vite che è mossa dalla po-
tenza applicata ad un manubrio. Si do-
manda in questa macchina l'equazione
tra la potenza ed il peso in caso d'equi-
librio. Sia m la lunghezza del manubrio,

p il passo della vite, X l'azione del dente contro la vite o la for-
za per sostenere il peso Q . Sia R il raggio della ruota, ed r il
raggio del cilindro. Per la vite avremo la proporzione (§. 69.)
 $P : X = p : 2\pi m$. Per la ruota dentata sarà $X : Q = r : R$.
Moltiplicando le due proporzioni sarà $P : Q = rp : R. 2\pi m$.

72. Cuneo. Sia il Cuneo AOB il quale per una potenza



P si sia internato in un corpo ed in caso
d'equilibrio sia nella situazione che si
vede, in cui esso è a contatto del corpo
nei punti E , F : si domanda l'equazione
d'equilibrio fra la potenza e la resisteu-
za. In primo luogo è evidente, che la
forza deve essere normale alla testa del
cuneo, perchè se P non fosse normale
si potrebbe decomporre in due l'una

normale alla testa, l'altra secondo questa: ora si vede chiaro che solamente la prima premerebbe. Dopo ciò la condizione dell'equilibrio è che decomposta la P secondo le direzioni CE , CF che vadano ai punti E , F di contatto siano normali al corpo, o normali alle tangenti OA , OB a questi punti del corpo onde siano pressioni elise sul corpo: dunque la risultante, e le due componenti sono normali ai lati del triangolo AOB sezione del cuneo: quindi le dette forze debbono essere proporzionali ai detti lati cui sono normali, dicendo r , r' le resistenze del corpo nei punti E , F avremo $P: r: r' :: AB: AO: BO$. Da ciò si vede che in una costante altezza di cuneo tanto minor forza produrrà eguali azioni quanto più piccolo sarà il lato AB .

CAPO II.

Equilibrio nelle macchine considerate le resistenze.

73. Nel capo antecedente non si sono considerate nelle macchine le resistenze che s'incontrano per parte dei corpi impiegati in esse, come sono principalmente l'attrito, e la rigidezza delle funi. Abbiamo trattato altrove dell'attrito: diciamo della rigidezza delle funi.

74. Resistenza prodotta dalla rigidezza delle funi.

Per bene intendere, da che provenga questa resistenza immaginiamo una forza che sollevi un peso traendo una fune addossata ad una troclea o ad un cilindro. Se la fune non è perfettamente pieghevole avviene nel tirarla, che rimane per qualche tratto discosta dalla superficie del cilindro, allontanando così il peso dall'asse di rotazione, e facendo crescere il suo momento; cosicchè ci vuole per questo conto una forza alquanto maggiore per sollevarlo. Questa forza addizionale vince e misura la resistenza proveniente dalla rigidezza. Essa può variare 1° secondo la tensione

della fune, ossia il peso ond'essa è gravata: 2° secondo la sua diversa qualità, fabbricazione, e preparazione; 3° secondo la sua grossezza: 4° secondo il raggio della troclea o cilindro, attorno al quale devo piegarsi. Variando il peso, che tende la fune, e tutte le altre circostanze rimanendo le stesse, la rigidità della fune per una parte è costante, per l'altra è proporzionata alla tensione: cosicchè può esprimersi per la formola $\mu + \nu Q$, essendo Q il peso tendente.

75. Varia la rigidità, e quindi variano i coefficienti μ, ν secondo la diversa qualità, fabbricazione e preparazione delle funi. In questa indefinita varietà però si può dire generalmente, che le funi sono più rigide quanto più sono nuove, e più attorte. Le funi impeciate sono più rigide delle bianche.

76. Variando il raggio della fune, o la sua circonferenza, varia la sua rigidità in ragione di una potenza k del raggio, o della circonferenza. Nelle funi nuove, e nelle funi impeciate può prendersi $k = 1.7$ e nelle funi molto usate $k = 1.4$.

77. Variando il raggio della troclea, o del cilindro, su cui s'avvolge la fune, varia la rigidità in ragione inversa del raggio.

78. I valori dei coefficienti μ, ν per due funi l'una bianca, l'altra impecciata della circonferenza di metri 0,0632, ed avviluppata ad un cilindro del raggio metri 0,0541. furono:

Per la fune bianca $\mu = \text{chil. } 2.06. \nu = 0.090$

Per la fune impecciata $\mu = \text{chil. } 3.23; \nu = 0.116$

Di qui si può prendere una norma per valutare a un disprezzo questa resistenza in ogni altro caso.

79. Riguardo alla velocità la resistenza proveniente dalla rigidità delle funi è costante.

80. Parlando dell' equilibrio nelle macchine nelle quali si vuole tener conto delle resistenze prodotte dalle macchine stesse, per l'attrito e rigidità delle funi si deve avvertire che la resistenza è sempre contraria alla forza prevalente alle altre. Se vince la potenza traendo il peso; l'attrito favorisce il peso, ed aiuta la potenza vinta dal peso, e se la forza ed il peso sono in equilibrio la loro differenza, o la differenza dei loro momenti deve essere uguale all'attrito, o al momento dell'attrito; intendendo sempre, che l'attrito sia contrario alla forza maggiore. Dopo ciò se F , e P siano le forze opposte, ed A sia l'attrito, per l'equilibrio deve essere $F - P = A$: dove $F > P$ mi dà $F = P + A$, cioè l'attrito positivo si aggiunge al P ; e se $F < P$ la A negativa si aggiunge alla minore F , avendosi $F + A = P$. Lo stesso si dica dei momenti quando prevalendo il momento della forza basta piccolo aumento perchè essa abbia l'effetto, e lo stesso si dica del peso. La rigidità delle funi è sempre contraria alla forza, ed aiuta la resistenza, o peso.

81. **Attrito nel piano inclinato.** Sia un piano inclinato nel quale sia Q il peso, P la potenza. Sia n' l'inclinazione del piano alla verticale, o all'altezza del piano, ed n l'angolo fatto dalla potenza colla lunghezza del piano. Si decompongano le forze P , Q : secondo la lunghezza del piano inclinato avremo le componenti $P \cos n$, $Q \cos n'$, e le componenti normali al piano saranno $P \sin n$, $Q \sin n'$. La somma di queste moltiplicate pel coefficiente f dell'attrito (§. 12.) mi darà l'attrito del corpo sul piano uguale ad $f P \sin n + f Q \sin n'$. La differenza $P \cos n - Q \cos n'$ dello due forze secondo il piano inclinato sarà la forza che tende a far discendere il corpo lungo questo piano. Per l'equilibrio questa forza (§. 80.) dovrà essere uguale all'attrito: dunque avremo

$$(a) \quad P \cos n - Q \cos n' = f P \sin n + f Q \sin n'$$

dalla quale si ha

$$P = Q \cdot \frac{\cos.n' + f \sin.n'}{\cos.n - f \sin.n}$$

Traendo la potenza orizzontalmente avremo

$$(b) \sin.n = \cos.n', \text{ e } P = Q \cdot \frac{1 + f \tan.n'}{\tan.n' - f}$$

E traendo la potenza parallelamente al piano sarà

$$n = 0 \text{ e } P = Q (\cos.n' + f \sin.n').$$

82. L'equazione (a) suppone prevalente la potenza se fosse maggiore il peso deve farsi (§. 79.) negativo il secondo membro, per lo che basta che si faccia negativa la f .

83. Nel caso nostro, ove si considera l'attrito, la direzione più vantaggiosa per la potenza per alzare il peso Q non è più la direzione parallela al piano, ma bensì quella, che diverge dal piano con angolo, che ha per tangente f : poichè assoggettando la (a) alla condizione del minimo col supporre n variabile e P funzione, troveremo $\tan.n = -f$. Che se la potenza dovesse soltanto trattenere la caduta del peso verrebbe $\tan.n = f$; onde la direzione della potenza dovrebbe convergere col piano dello stesso angolo.

84. Si supponga che il peso Q sia sostenuto dall'asse di una ruota, che la forza tenda a farlo salire lungo un piano inclinato, e si voglia la condizione dell'equilibrio. Sia R il raggio della ruota, od r quello del suo asse, e si ritengano le antecedenti espressioni delle quantità. Egli è chiaro, che la forza $P \cos.n - Q \cos.n'$ parallela alla lunghezza del piano inclinato tende a far girare il centro della ruota intorno al punto in cui essa tocca il piano. Il momento di questa rotazione è $PR \cos.n - QR \cos.n'$. Ora la detta ro-

tazione non può aver luogo se la ruota non si rivolge intorno al suo asse: ma a questa rotazione si oppone l'attrito $f P \sin.n + Q \sin.n'$ che fa l'asse contro il cerchio, che lo stringe, ed il momento di questa resistenza è

$$f P r \sin.n + f Q r \sin.n'$$

dunque per l'equilibrio abbiamo

$$PR \cos.n - QR \cos.n' = f P r \sin.n + f Q r \sin.n'$$

d'onde abbiamo

$$(c) \quad P = Q \cdot \frac{R \cos.n' + f r \sin.n'}{R \cos.n - f r \sin.n'}$$

Se questa formola si assoggetta alla condizione del minimo si vede che la direzione più vantaggiosa della forza è quando $\tan.n = -\frac{fr}{R}$.

85. Egli è poi lo stesso, che il peso sia portato da una ruota, o da più ruote uguali, perchè compartendosi fra le ruote la pressione prodotta dal peso, la somma degli attriti sarà sempre $f P \sin.n + f Q \sin.n'$, e la somma dei loro momenti sarà $f P r \sin.n + f Q r \sin.n'$; ed ancora la somma dei momenti delle forze traenti sarà $PR \cos.n - QR \cos.n'$, onde avrà luogo la superiore equazione (c).

86. Da ciò si vede come le ruote aiutino la forza, specialmente per parte dell'attrito, che con queste si ha un attrito di terzo genere più debole del primo genere, che avrebbe luogo nello strascinarsi dalla forza il peso lungo il piano.

87. Se il piano è orizzontale e la direzione del tiro è pure orizzontale la (c) ci dà $P = \frac{frQ}{R}$. Ora se la forza trascinasse il peso in piana terra avremmo $P = fQ$: dove si

vede che il P antecedente si ha dal P attuale col moltiplicarlo per la frazione $\frac{r}{R}$.

88. **La vite.** Si ritengano per la vite la rappresentanza delle grandezze come sopra (§. 69.), avremo

$$(a) \quad P: X = r: m.$$

Andando ora a trovare il rapporto fra X e Q dovremo prendere la formola (b) (§. 81.) del piano inclinato: quindi avremo

$$(b) \quad X: Q = 1 + f \operatorname{tang}. n': \operatorname{tang}. n' - f.$$

Ora nel piano inclinato considerato nella vite (§. 68.)

$$\operatorname{tang}. n' = \frac{2\pi r}{p} \text{ quindi}$$

$$X: Q = p + 2f\pi r: 2\pi r - fp$$

Moltiplicando la (a) colla (b) avremo in ultimo

$$P = Q \cdot \frac{r}{m} \cdot \frac{p+2f\pi r}{2\pi r - fp}.$$

89. **Equilibrio di una potenza con un peso da essa sostenuto con una fune applicata ad una curva considerandovi l'attrito.** La potenza P sostenga il peso



Q per mezzo della fune QAP applicata al convesso BMA di una curva qualunque RBOE. Sia $BA = a$, $BM = s$, l'infinitesimo $Mm = ds$ e concorrano in K le normali KM, Km sui due punti M, m della curva. Si ponga

$KM = r$, sarà questo il raggio osculatore della curva in M.

La forza, che stira la fune in M o la sua tensione sia T , la tensione in m sarà $T + dT$, e la di lei pressione sull'archetto Mm sia Nds . L'archetto Mm si può considerare come formato da due latercoli infinitesimi MO , mO uguali perchè in un poligono infinitilatero, la pressione costante fatta in tutti i punti dell'elemento dalla fune MOm dà una risultante Nds , che si può considerare in O secondo OK . Ora questa si può supporre come la risultante delle due tensioni uguali T , $T + dT$ in M , ed m . Ma una delle componenti uguali è uguale alla risultante divisa pel doppio coseno dell'angolo che fanno fra loro: dunque

$$T = \frac{Nds}{2\cos KOM} \text{ ora il triangolo } OKM \text{ rettangolo in } M \text{ dà}$$

$$\cos KOM = \frac{MO}{KO} = \frac{ds}{2r} :$$

dunque $T = Nr$. In M abbiamo la tensione T prodotta da Q ed in m la tensione $T + dT$ prodotta da P : dunque $T + dT - T$, ossia dT sarà l'eccesso dell'azione di P in m sopra l'azione di Q in M . Affinchè si abbia l'equilibrio o che la fune non scorra, fa duopo che dT sia uguale all'attrito prodotto dal latercolo Mm della fune, ossia deve essere $dT = fNds$: ma si deve porre il doppio segno, che sarà positivo se prevale l'azione di P in m all'azione di Q in M , e negativo in caso contrario; dunque $dT = \pm fNds$. Dividendo questa per l'altra avuta $T = Nr$ sarà

$$(a) \quad \frac{dT}{T} = \pm \frac{f ds}{r} .$$

90. Caso della curva circolare. Se BOA è un arco circolare sarà r costante, e l'integrale completo della (a) sarà

$$P = Q e^{\pm \frac{af}{r} s}$$

91. Supponiamo, che la fune avvolta ad un cilindro abbracci la metà della circonferenza onde sia $\frac{a}{r} = \pi$: avremo, $P = Q e^{-f\pi}$ (b). Se si faccia $f = 0.35$ si troverà prossimamente $e^{f\pi} = 3$: quindi avremo nella prevalenza di

P, a Q, $P = 3 Q$. Se f è negativo e $\frac{-f\pi}{r} = \frac{1}{3}$, onde $P = \frac{1}{3} Q$ valor minimo di P. Che se la fune abbracciasse una volta e mezzo il cilindro allora nella formola (b) in luogo di π si porrà 3π ed avremo $e^{3f\pi} = (e^{f\pi})^3 = 3^3 = 27$: quindi $P = 27 Q$ pel valor massimo di P, e $P = \frac{1}{27} Q$ pel valor minimo.

92. Se poi la fune girasse due volte e mezzo, allora invece di π si dovrebbe porre 5π e si troverebbe

$$P = 243. Q, P = \frac{1}{243} Q.$$

E così ad ogni giro di più il valore di P dovrebbe accrescersi nove volte tanto per giungere a sollevare il peso, e potrebbe scemarsi nove volte per sostenerlo semplicemente.

93. Di qui si vede qual forza enorme si ricerchi per alzare un peso mediante una fune che con molte spire abbracci un cilindro immobile; e qual piccola forza sia bastante ad impedire la discesa del peso.

94. **La leva.** Sia la potenza P che debba essere in equilibrio col peso Q in una leva mobile intorno ad un asse di raggio C E. La risultante E R delle due forze P, Q uguale alla loro somma si risolva in E S tangente al cilindro, ed in E T ad esso normale. Se dicasi m l'angolo RES



avremo

$$ES = (P + Q) \cos.m, \text{ ed } ET = (P + Q) \sin.m.$$

Avendosi ora invece di P, Q le due ES, ET , queste si debbono equilibrare; cioè la ES dovrà essere elisa dall'attrito, che produce la pressione ET fatta dal cilindro nel cerchio che raderebbe nel caso del moto: dunque $ES = f. ET$, ossia ponendo i valori antecedenti, deve essere $\cos.m = f \sin.m$ ossia $1 - \sin^2.m = f^2 \sin^2.m$, dalla quale

$$\sin.m = \frac{1}{\sqrt{1+f^2}} : \text{dunque}$$

$$ES = f. ET = f(P + Q) \sin.m = \frac{f(P+Q)}{\sqrt{1+f^2}}.$$

Ora abbiamo tre forze P, Q , e la resistenza ES che si debbono equilibrare: dunque i loro momenti debbono essere uguali: dicendo dunque a, b i bracci delle due forze P, Q e facendo $CE = r$ avremo

$$Pa = Qb + \frac{fr(P+Q)}{\sqrt{1+f^2}}.$$

E ciò suppone il momento Pa prevalente a Qb ; ossia l'azione maggiore di P , o finalmente il punto in cui la P è in sul sollevare il peso col minimo suo aumento. Che se si faccia f negativo avremo il punto in cui è il peso in procinto di vincere la forza. Il coefficiente f dell'attrito suol essere così piccolo che si può trascurare f^2 , quindi avremo più semplicemente

$$Pa = Qb + (P + Q) fr$$

ossia

$$P = Q \frac{b+fr}{a-fr}.$$

Se le forze P, Q non sono parallele ma facciano l'angolo θ , nella equazione precedente in luogo di $P + Q$ si porrà

$$\sqrt{(P^2 + 2 P Q \cos \theta + Q^2)},$$

e li braeci a , b saranno le normali calate dal fulero sulle direzioni delle forze.

95. Caso di più leve. Siano per esempio tre leve delle quali l'una agisca sopra l'altra. Sia X l'azione reciproca della prima e seconda leva, Y l'azione reciproca della seconda e terza. Sia la potenza P applicata normalmente al principio della prima leva, e Q nello stesso modo applicata all'estremo della terza. I braeci a dritta dalla parte di P siano a , a' , a'' , e quelli a sinistra siano b , b' , b'' ; siano r , r' , r'' i raggi degli assi intorno a cui ruotano le leve. Trattando ciascuna leva, avremo

$$Pa = Xb + (P + X) fr$$

$$Xa' = Yb' + (X + Y) fr'$$

$$Ya'' = Qb'' + (Y + Q) fr''.$$

Eliminando X , Y avremo

$$P = Q \cdot \frac{b+fr}{a-fr} \cdot \frac{b'+fr'}{a'-fr'} \cdot \frac{b''+fr''}{a''-fr''}.$$

Se

$$a = a' = a'', b = b' = b'', r = r' = r''$$

avremo

$$P = Q \cdot \left(\frac{b+fr}{a-fr} \right)^3.$$

96. L'argano. In questa macchina le forze P , Q siano parallele, e sia a il raggio della ruota, b quello del cilindro, r quello dell'asse di rotazione: l'equazione dell'equilibrio avendo riguardo all'attrito ed alla rigidità della fune sarà

$$Pa = Qb + (P + Q) fr + b (\mu + \nu Q).$$

Questa si ricava immediatamente dal caso (§. 94), e l'ul-

timo termine è il momento della rigidità della fune (§. 74). Nell'argano sogliono essere disposte più potenze all'intorno a due a due applicate a punti diametralmente opposti, quindi esse in tal caso non producono attrito, perciò può trascurarsi il termine Pfr e l'equazione diventa

$$Pa = Q(b + fr) + b(\mu + \nu Q).$$

97. Tutte l'equazioni antecedenti servono al caso in cui la potenza è sul punto di sollevare il peso. Che se si volessero l'equazioni quando il peso fosse nel punto di discendere, basterebbe in esse far negative le quantità f , μ , ν , onde riuscisse negativa la differenza dei momenti $Pa - Qb$, che esprimerebbe così la prevalenza di Qb a Pa .

98. **Troclea.** Egli è evidente che per la troclea vale l'equazione dell'argano purchè in essa si faccia $a = b$.

99. **Taglia.** Per agevolare il calcolo di questa macchina si supporrà primo, che tutti i capi di fune siano paralleli: 2°, che siano uguali i raggi delle girelle: 3°, che essendo f molto piccolo si possa fare $\sqrt{1 + f^2} = 1$: in ultimo che la rigidità della fune sia prossimamente proporzionale alla tensione, o peso, onde possa farsi $\mu = 0$. Ciò posto siano t , t' , t'' ec. le tensioni dei capi di fune cominciando da quello, che ha l'estremo fisso fino a quello, alla cui estremità è applicata la potenza. Ciò posto per la prima tensione t e la seconda t' , che è il caso della troclea o argano di raggi aguali avremo

$$t'a = ta + (t' + t)fr + avt.$$

Se si faccia $\frac{a(\nu + 1) + fr}{a - fr} = A$, l'antecedente equazione diventerà $t' = At$. Similmente si troverà

$$t'' = At' = A^2t, \quad t''' = At'' = A^3t \text{ ec.}$$

quindi l'ultima tensione, che è quella del capo di fune, cui

è applicata la potenza si troverà uguale ad $A^k t$. La somma di tutte le altre sarà

$$(1) \quad t (1 + A + A^2 + A^3 \dots + A^{k-1}) = t \frac{A^k - 1}{A - 1}.$$

Ora l'ultima tensione $A^k t$ è uguale alla potenza P , e la somma di tutte le altre è uguale al peso Q : dunque

$$P = A^k t, \quad Q = t \frac{A^k - 1}{A - 1},$$

e quindi eliminando il t

$$(2) \quad P = Q \frac{A^k(A - 1)}{A^k - 1}.$$

100. Se sia nullo l'attrito, la rigidezza della fune sarà $f = 0$, $\nu = 0$, e quindi $A = 1$. In tal caso l'equazione antecedente (2) ci dà $P = \frac{0}{0}$. Ma prendendo il valore

$$(1) \quad \text{di } \frac{A^k - 1}{A - 1}, \text{ che è } 1 + A + A^2 + A^3 \dots + A^{k-1}$$

e facendovi $A=1$ ci dà k : dunque dalla (2) avremo $P = \frac{Q}{k}$:

cioè la potenza è il peso diviso pel numero dei capi di fune che vanno alla taglia mobile come nel (§. 35).

101. **Sistema di ruote dentate.** La potenza P col braccio di leva AK muove una ruota EA , il di cui dente spingendo il peso della lanterna o rocchetto D fa girare la lanterna ed insieme il cilindro B , dalla di cui circonferenza pende il peso Q . Cercasi la condizione d'equilibrio considerando l'attrito del dente contro il fuso. Sia D il punto di contatto tra il dente ed il fuso. Si conducano le



rette AD, BD, e prolungata la BD verso E sia l'angolo ADE = γ . Sia DZ = X la potenza che si dovrebbe applicare al punto D normalmente alla BD affinchè fosse sul punto di sollevare il peso Q. Poichè si prescinde dall'attrito dell'asse B, e dalla rigidezza della fune si avrà

$$X \cdot BD = Q \cdot BT.$$

Se ora si prenda la DX uguale e contraria alla DZ è manifesto, che questa DX esprimerà la resistenza, che oppone il fuso al movimento della ruota. Decompongasì la DX nelle due DM, DN, la prima normale ad AD, l'altra secondo AD. Affinchè la potenza P faccia girare la ruota le converrà superare non solo la potenza DM tendente a produrre una rotazione contraria, ma altresì l'attrito $f \cdot DN$ proveniente dalla pressione DN, che il fuso esercita in D contro il dente della ruota normalmente all'archetto descritto dal punto D: avremo dunque

$$P \cdot AK = (DM + f \cdot DN) \cdot AD \quad (\S. 96):$$

$$\text{ma } DM = DX \cos. MDX = X \cos. \gamma$$

$$DN = DX \sin. MDX = X \sin. \gamma$$

dunque

$$P \cdot AK = X \cdot AD (\cos. \gamma + f \sin. \gamma):$$

ma avevamo

$$X \cdot BD = Q \cdot BT :$$

dunque sostituendo nell'antecedente il valore di X ricavato da questa, sarà

$$P = \frac{Q \cdot AD \cdot BT}{AK \cdot BD} (\cos. \gamma + f \sin. \gamma)$$

equazione domandata.

102. Dal punto in cui il dente aggrappa il fuso sino al punto in cui se ne distacca si va mutando il contatto D,

e vanno crescendo le distanze AD, BD, ed insieme l'angolo y . Cerchiamo il valor massimo. L'accrescimento della BD è piccolissimo, e può trascurarsi stante la piccolezza del cerchio D, e la sua distanza dal centro B. In quanto ad AD ne prenderemo il valor maggiore, cioè quel raggio che va dal punto A al punto ove il dente scappa dal fuso. Da ciò risulta, che nell'equazione superiore manca trovare il massimo di $\cos y \rightarrow f \sin y$. Assoggettando questa quantità al calcolo del massimo si trova $\tan y = f$, pel qual valore abbiamo

$$\cos y + f \sin y = \sqrt{1 + f^2};$$

dunque il massimo di P, o quello che è in procinto di sollevare il peso nel momento che il dente scappa da quello della lanterna è

$$P = \frac{Q \cdot AD \cdot BT}{AK \cdot BD} \sqrt{1 + f^2}$$

prendendo i raggi BD, AD come poco fa si è detto.

103. Se si faccia $f = \frac{1}{3}$ si ha prossimamente

$$\sqrt{1 + f^2} = \frac{19}{18}.$$

Di qui la regola pratica, che quando si alza il peso per un incastro della ruota col fuso di una lanterna, per mettere in conto l'attrito del dente, bisogna accrescere il peso, o il suo braccio di una diciottesima parte.

104. Se il sistema è composto di più ruote e di più rocchetti e fusi, e siano $a, a', a'' \dots$ i bracci di leva posti dalla parte della potenza, e $b, b', b'' \dots$ i bracci di leva posti dalla parte del peso, e sia n il numero degli incastri, che sarà sempre d'una unità minore del numero delle copie di bracci sopradetti, avremo

$$P = Q \cdot \frac{bb'b'' \dots}{aa'a'' \dots} (1 + f^2)^{\frac{n}{2}}$$

CAP. IV.

Equilibrio nel poligono e curva funicolare.

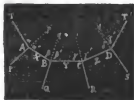
105. Fino ad ora si è parlato dell'equilibrio dei sistemi assolutamente invariabili, or dobbiamo trattare l'equilibrio dei sistemi in qualche modo variabili, quali sono le forze applicate a funi, ed a corpi elastici. In questo capo parleremo del primo caso: cioè delle forze in equilibrio applicate a funi perfettamente flessibili; le quali forze se saranno a distanze finite, ci daranno l'equilibrio delle forze nel poligono funicolare; se saranno a distanze infinitesime avremo l'equilibrio delle forze nella curva funicolare.

106. **Tensione.** Nei sistemi di forze applicate a funi perfettamente flessibili sorge una forza, che non si considera nei sistemi invariabili, e questa è la tensione. Per questa s'intende lo stiramento della fune prodotto dalle forze in equilibrio. Questo stiramento deve aver luogo, perchè se in qualche intervallo finito o infinitesimo fra le dette forze occupato dalla fune, che si dice *capo di fune*, la fune non fosse stirata o tesa, è chiaro che non contribuirebbe nulla all'equilibrio, e quindi si potrebbe rescindere, e non sarebbe più uno il sistema delle forze in equilibrio, ma tanti separati, per quanti fossero i capi rescissi più uno. La tensione dunque deve aver luogo in tutti i capi di fune interposti ai punti di applicazione delle forze, siano essi finiti come nei poligoni funicolari, o infinitesimi come nelle curve funicolari. Egli è chiaro, che la tensione di un capo di fune è prodotta da due forze uguali, opposte, e dirette secondo il detto capo di fune applicate alle di lui estremità. Egli è evidente, che debbano essere direttamente opposte: che poi debbano essere uguali è parimenti chiaro, perchè se avessero una differenza, con questa il capo di fune non

sarebbe teso, ma trasportato con moto progressivo dalla parte della forza maggiore. Una di queste forze uguali in meccanica si chiama *tensione*. Dunque la *tensione di un capo qualunque di fune prodotta da forze in equilibrio è una delle forze uguali e contrarie applicate alle sue estremità*.

107. Condizione per l'equilibrio delle forze nel poligono funicolare. In questo poligono, come è chiaro, le forze sono applicate ai vertici dei suoi angoli, ed agiscono da dentro in fuori. Queste forze in ogni vertice sono una, o si riducono ad una colla composizione. Ora affinché esista l'equilibrio è necessario, e basta, che decomposte le forze applicate ai vertici degli angoli del poligono in due secondo i lati contigui del poligono stesso queste siano tensioni: ossia che le componenti agli estremi dello stesso lato essendo di lor natura opposte, siano uguali. Infatti per l'equilibrio delle forze nel poligono funicolare si richiede, che non abbia luogo moto nè progressivo, nè rotatorio, essendo tcsi i capi di fune. Ora coll'essere le componenti delle forze secondo i lati del poligono tensioni di questi, ed i capi sono tesi, e le forze si elidono, dunque la detta è la condizione dell'equilibrio.

108. Espressione in equazioni della detta condizione. Sia il poligono funicolare come in figura, nel quale



gli estremi T, T' siano fissi, ed ai punti A, B, C, D siano applicate le forze P, Q, R, S. Siano α , α' gli angoli che il prolungamento Ap di P fa coi lati contigui AT, AB, e così degli altri, come in figura. Si decomponga la P secondo questi lati ed avremo chiamando T, e X le componenti

$$T = \frac{P \sin \alpha'}{\sin(\alpha + \alpha')}, \quad X = \frac{P \sin \alpha}{\sin(\alpha + \alpha')}.$$

Si faccia lo stesso per Q, R, S col avvertire che le componenti secondo lo stesso capo di fune or ora si faranno uguali, ed avremo

$$\begin{aligned} X &= \frac{Q \operatorname{sen} \beta'}{\operatorname{sen}(\beta + \beta')} , Y = \frac{Q \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta + \beta')} ; \\ Y &= \frac{R \operatorname{sen} \gamma'}{\operatorname{sen}(\gamma + \gamma')} , Z = \frac{R \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\gamma + \gamma')} ; \\ Z &= \frac{S \operatorname{sen} \delta'}{\operatorname{sen}(\delta + \delta')} , T' = \frac{S \operatorname{sen} \delta}{\operatorname{sen}(\delta + \delta')} . \end{aligned}$$

Dopo ciò la condizione dell'equilibrio (§ 107) sarà espressa dalle equazioni

$$(a) \left\{ \begin{aligned} \frac{P \operatorname{sen} \alpha}{\operatorname{sen}(\alpha + \alpha')} &= \frac{Q \operatorname{sen} \beta'}{\operatorname{sen}(\beta + \beta')} \\ \frac{Q \operatorname{sen} \beta}{\operatorname{sen}(\beta + \beta')} &= \frac{R \operatorname{sen} \gamma'}{\operatorname{sen}(\gamma + \gamma')} , \\ \frac{R \operatorname{sen} \gamma}{\operatorname{sen}(\gamma + \gamma')} &= \frac{S \operatorname{sen} \delta'}{\operatorname{sen}(\delta + \delta')} \end{aligned} \right.$$

109. Caso in cui la forza è scorrevole nel poligono. Se la forza ex. gr. P è applicata ad un anello A scorrevole, essa si fermerà quando la sua direzione dividerà in mezzo l'angolo TAB. Infatti essendo fissi i punti T, B, il punto scorrevole A descriverà un'ellisse, i di cui fochi sono T, B, ed i raggi vettori di somma costante sono AT, AB: dunque il punto A si trova, ovunque si muova, sul concavo dell'ellisse: perciò allora si fermerà quando la direzione della forza, che lo muove sia normale alla curva: ma la normale in un punto dell'ellisse divide in mezzo l'angolo fatto in questo punto dai raggi vettori, dunque la forza A quando sia ferma dividerà in mezzo l'angolo fatto dai due capi di fune contigui, e perciò le tensioni da essa prodotte sono uguali.

110. Caso del poligono funicolare in cui le forze dividono in mezzo gli angoli ai vertici dei quali sono applicate. In questo caso le componenti di ciascuna forza secondo i capi contigui di fune sono fra loro uguali; ma per l'equilibrio sono uguali anche le due forze in ciascun capo di fune: dunque tutte le forze secondo tutti i capi di fune sono uguali: queste sono le loro tensioni: dunque nel caso stabilito il poligono è per tutto teso ugualmente.

111. Si dia T questa tensione costante: essendo

$$\alpha = \alpha', \text{ sarà (§. 108) } P = 2T \cos \alpha:$$

dunque nel detto caso *le forze sono come i coseni della metà degli angoli del poligono divisi in mezzo dalle forze.*

112. Caso della fune tesa sopra punti. Dunque se in luogo delle forze P, Q, R, S si stabiliscano dei punti fissi A, B, C, D al di sotto dei quali passi la fune $TABCDT'$: in primo luogo le forze T, T' che tirano l'estremità di questa corda saranno uguali, e la corda sarà per tutto tesa ugualmente: ed in secondo luogo la fune premerà ciascun punto in ragione del coseno della metà dell'angolo del poligono di cui quel punto è vertice. Infatti in questo caso ciascuna forza, che è pressione, deve dividere in mezzo il detto angolo per dare due componenti uguali secondo i due lati contigui del poligono: perchè altrimenti essendo disuguali, la fune, che si suppone perfettamente flessibile, scorrerebbe sul punto dalla parte della componente maggiore.

113. Supponiamo che i due lati contigui AB, BC siano uguali, il coseno della metà dell'angolo ABC è uguale ad uno di questi lati diviso pel diametro del circolo, che passa per li tre punti A, B, C . Dunque se tutti i lati del poligono funicolare sono fra loro uguali si può dire, che tutte le forze P, Q, R, S , che dividono in mezzo i loro angoli, sono in ragione inversa dei diametri dei diversi circoli, di

cui ciascuno passa per li vertici di tre angoli consecutivi del poligono, e le dette forze sono dirette secondo i detti diametri.

114. Funne tesa sul convesso d' una curva. Consideraudo una curva come un poligono di lati infinitesimi, che perciò si possono supporre fra loro uguali, ciascuno di questi circoli diviene circolo osculatore ad un ed un altro punto della curva: dunque se si ha una curva funicolare i di cui estremi sono fissi formata da forze applicate a tutti i punti e dirette secondo i raggi dei circoli osculatori ai detti punti, o in questi punti normali alla curva, la fune è per tutto tesa ugualmente, e perciò se non sono fissi gli estremi saranno tenuti da due forze di direzioni tangenti ai detti estremi, e fra loro uguali, e ciascuna forza è in ragione inversa del raggio del circolo osculatore al punto ove la forza è applicata. Questo caso equivale a quello in cui la fune è tesa da due forze applicate all'estremità sul convesso di una curva qualunque: perchè ciascun punto della curva essendo premuto normalmente alla curva questa forza è secondo il raggio osculatore, quindi la fune è per tutto tesa ugualmente, le forze estreme tendenti debbono essere fra loro uguali, e la pressione è in ragione inversa dei corrispondenti raggi osculatori.

115. L'equilibrio delle forze in un poligono funicolare rimane quando le forze siano applicate ad un punto rimanendo parallele alla loro primitiva posizione. Se tutte le forze P, Q, R, S , e le tensioni T, T' dei capi estremi, tutte forze in equilibrio nel poligono, si trasportassero parallelamente a se stesse fino ad essere applicate ad un punto a piacere, in questo sarebbero in equilibrio; perchè decomponendo le forze P, Q, R, S parallelamente ai loro capi contigui di fune si otterrebbero le tensioni di ciascun capo, che sono uguali e contrarie.

116. Risultante delle forze da un estremo fino ad una forza qualunque nel poligono. Tutte le forze del

poligono da un estremo T fino ad una forza qualunque R hanno una risultante uguale alla tensione Z del capo di fune seguente al punto C di applicazione di R , perchè la forza T e le componenti di P , Q , R secondo i capi contigui di fune danno la componente Z di R secondo CD eliminandosi tutte le altre come tensioni dei capi TA , AB , BC .

117. Caso in cui si può trovare il punto per dove passa la direzione della risultante delle forze applicate al poligono funicolare. Se i due capi estremi AT , DT' sono in un piano, prolungati s'incontreranno in un punto O , e per questo punto dovrà passare la risultante delle forze interposte P , Q , R , S fra quei capi. Infatti il sistema delle forze in equilibrio nel poligono funicolare si consideri come invariabile in tal caso (dinam. §. 8.) una qualunque di queste forze deve essere uguale e direttamente opposta alla risultante delle altre, o, che è lo stesso, la risultante di due qualunque deve essere uguale e direttamente opposta alla risultante delle altre: dunque la risultante di T , T' è uguale e direttamente opposta alla risultante delle forze P , Q , R , S : perciò la risultante di questa deve passare per l'intersezione O di AT , e DT' .

118. Si vede poi che ciò vale per due lati presi a piacere, purchè giacciono nello stesso piano, che cioè pel punto di intersezione del loro prolungamento, passa la risultante delle forze interposte fra i detti lati.

CAP. V.

Poligono funicolare di forze parallele.

119. Le forze parallele sono tutte in un piano col poligono funicolare. Infatti in ogni poligono funicolare ciascuna forza è in un piano coi capi contigui di fune, per-

chè la risultante è nello stesso piano delle due componenti congiunte ad angolo. Inoltre le forze parallele a due a due sono nello stesso piano coi capi di fune interposti come secanti. Posto il parallelismo si ha

$$\text{sen}\alpha' = \text{sen}\beta, \text{sen}\beta' = \text{sen}\gamma, \text{sen}\gamma' = \text{sen}\delta.$$

Moltiplicando l'equazioni (a) (§. 108) rispettivamente per queste uguaglianze sarà

$$\frac{P \text{sen}\alpha \text{sen}\alpha'}{\text{sen}(\alpha + \alpha')} = \frac{Q \text{sen}\beta \text{sen}\beta'}{\text{sen}(\beta + \beta')} =$$

$$\frac{R \text{sen}\gamma \text{sen}\gamma'}{\cos(\gamma + \gamma')} = \frac{S \text{sen}\delta \text{sen}\delta'}{\text{sen}(\delta + \delta')};$$

ossia

$$\frac{P}{\cot.\alpha + \cot.\alpha'} = \frac{Q}{\cot.\beta + \cot.\beta'} =$$

$$\frac{R}{\cot.\gamma + \cot.\gamma'} = \frac{S}{\cot.\delta + \cot.\delta'};$$

cioè nel poligono funicolare di forze parallele in equilibrio ogni forza è come la somma delle cotangenti degli angoli che fa coi due lati contigui.

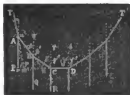
120. Tensione orizzontale. Si suppongano disposte verticalmente le forze parallele, e si decomponga la tensione

$$X = \frac{P \text{sen}\alpha}{\text{sen}(\alpha + \alpha')} \text{ secondo AB in}$$

due, l'una orizzontale, e l'altra verticale: evidentemente l'orizzontale sarà

$$\frac{P \text{sen}\alpha \text{sen}\beta}{\text{sen}(\alpha + \alpha')}; \text{ ma } \text{sen}\beta = \text{sen}\alpha',$$

dunque la tensione orizzontale sarà



$$\frac{P \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} \alpha'}{\operatorname{sen}(\alpha + \alpha')} = \frac{P}{\operatorname{col} \alpha + \operatorname{col} \alpha'} ;$$

questa è quantità costante (§. 119): dunque nel poligono funicolare di forze parallele la tensione orizzontale è per tutto costante, ed a questa condizione equivale quella dell'equilibrio.

121. Tensione assoluta. Si dica O la tensione orizzontale sarà (§. 120) $X \operatorname{sen} \beta = O$, d'onde $X = \frac{O}{\operatorname{sen} \beta}$. Essendo O costante si vede che la tensione di un qualunque lato è in ragione inversa del seno della sua inclinazione alla verticale, ossia è in ragione inversa del coseno della sua inclinazione all'orizzontale.

122. Valore di un numero qualunque di forze. Nel nostro poligono vi sia un lato CD orizzontale, e supponiamo che prolungato s'incontri in m col lato TA pur prolungato. Sia i l'inclinazione di TA all'orizzontale mr . Per m si conduca una verticale, questa sarà la direzione della risultante V delle forze intercette (§. 117) cominciando da A , e andando a C , e sarà uguale alla loro somma. Avendosi ora le due componenti T , O , e la risultante V , e dovendo essere ognuna come il seno dell'angolo fatto dalle altre due avremo l'equazione $V = O \operatorname{tang} i$; cioè la somma delle forze fra un lato qualunque, ed un lato orizzontale è uguale alla tensione costante orizzontale moltiplicata per la tangente d'inclinazione del primo lato sull'orizzontale.

123. Proprietà della curva funicolare. Nella curva funicolare di forze parallele, che è un poligono infinitilatero (§. 120, 121, 122), la tensione in un punto qualunque, che è secondo il prolungamento del latercolo infinitesimo, che ha un estremo a questo punto, o secondo la tangente al detto punto, è in ragione inversa del coseno dell'inclinazione di detta tangente all'orizzontale: la tensione poi orizzontale è per

ponente orizzontale $(P+Q+R)\text{tang.}\alpha$. Da ciò si ricava, che le forze del mezzo poligono fanno uno sforzo verticale in T uguale alla loro somma, e che vi producono la forza orizzontale da fuori in dentro del poligono espressa dalla somma delle dette forze nella tangente dell'inclinazione all'orizzontale del lato all'estremità del quale queste forze fanno la loro azione.

Prolungando il lato AB, ed il suo corrispondente dall'altra parte si vedrà, che in A si fa uno sforzo verticale uguale alla somma delle forze da C sino ad A, ed uno orizzontale espresso da questa somma moltiplicata per l'inclinazione di BA all'orizzontale.

125. Poligono di lati rigidi. Tutto ciò che è stato detto del poligono funicolare vale pel caso che le forze siano applicate ai vertici degli angoli di un poligono formato di verghe inflessibili non pesanti l'una addossata all'altra colle loro estremità. Si vede che queste forze debbono essere, dirette nel concavo del poligono, mentre quelle del poligono funicolare agiscono dalla parte della convessità. Egli è evidente, che anche in questo caso la condizione fondamentale dell'equilibrio, da cui si ricavano tutte le proprietà del detto poligono, è, che decomposta ciascuna forza secondo i lati contigui del poligono, le due componenti secondo ciascun lato siano uguali agendo nell'attual caso contrariamente verso la metà dei detti lati: mentre nel poligono funicolare le dette componenti agivano da dentro del lato verso l'estremità.

CAP. VI.

Della Curva Catenaria

126. La curva catenaria o semplicemente catenaria è quella cui sono applicate in tutti i punti forze parallele in equilibrio. La Catenaria omogenea è quella, che avendo sezioni identiche, è animata da forze parallele uguali in equilibrio.

127. Teorema fondamentale della catenaria. Il teorema fondamentale di ciò che si dice della catenaria è, che la somma delle forze applicate ad una porzione qualunque della curva cominciando dal punto più basso è uguale alla tensione orizzontale di questo punto moltiplicata per la tangente trigonometrica dell'inclinazione della tangente al punto ove termina l'arco sulla orizzontale, per la quale si prende la tangente orizzontale al detto punto più basso (§. 123).

128. Equazione generale della catenaria. Sia la Ca-



tenaria RAT fissa nei due estremi R, T ed animata da forze qualunque parallele, ed in equilibrio. Si consideri di questa curva una porzione AG cominciando dal punto più basso, e da questo condotta la verticale AS, che si

prenda per asse delle ascisse, del punto G sia l'ascissa $AD = x$, e l'ordinata $GD = y$. L'angolo d'inclinazione della tangente in G sulla orizzontale BA tangente al punto più basso A è l'angolo, che la tangente fa coll'ordinata GD: ora questo angolo evidentemente ha per tangente trigonometrica $\frac{dx}{dy}$.

Se si dica φ la forza in G sarà φds il quantitativo di forza dell'archetto ds : dunque $\int \varphi ds$ sarà il totale delle forze applicate ad s , o a GA: dopo ciò il teorema richiamato nel (§. 127) si tradurrà in calcolo colla equazione

$$(1) \quad \int \varphi ds = a \frac{dx}{dy},$$

ove a è la tensione orizzontale della catenaria, per cui si può fissare la tensione assoluta del punto più basso A.

129. Uso dell'equazione generale. L'equazione (1) può servire a due specie di problemi. Il primo si esprime così. Dato il valore della forza φ in funzione delle coordinate

trovare la catenaria. Il problema inverso poi assegna la catenaria, e vuol trovare le forze φ . L'equazione (1) risolve la prima specie. Per risolvere la seconda specie di problemi si differenzia la (1) ed avremo

$$(2) \quad \varphi = \frac{dy}{ds} \frac{dx}{dy}.$$

130. Equazioni per la tensione assoluta, ed orizzontale. La tensione orizzontale si ha dalla equazione (1). Infatti si ottiene subito

$$(3) \quad a = \frac{dy}{dx} \int \varphi ds.$$

Nella cicloide, in cui si suppongano tutte le forze uguali ad uno abbiamo $a=4r$; ove r è il raggio del circolo generatore.

La tensione assoluta si ha dal suo valore $\frac{0}{\cos.i}$ (§. 121).

Ora $\cos.i = \frac{dy}{ds}$ dunque indicando per t la tensione ad un punto di coordinate x, y avremo

$$(4) \quad t = \frac{ds}{dx} \int \varphi ds = \frac{4r\sqrt{2r}}{\sqrt{(2r-x)}}$$

per la cicloide.

131. Problemi della seconda specie. Trovare il valore delle forze in una catenaria parabolica. Abbia la parabola il vertice al basso, e l'asse delle x computate dal vertice sia verticale. L'equazione della parabola sia $y^2=2px$, avremo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{y}{p}; ds = dy \sqrt{1 + \frac{dx^2}{dy^2}} = \frac{dy}{p} \sqrt{p^2 + y^2}.$$

Sostituiti questi valori nella (2) avremo

$$\varphi = \frac{a}{\sqrt{(p^2 + y^2)}}.$$

Nelle massime vicinanze del punto più basso la y^2 è trascurabile: dunque in questi punti della catenaria la forza

è costante. Da ciò si può ricavare, che la catenaria, nella quale le forze sono costanti, nelle vicinanze del punto più basso è prossimamente una parabola. Ciò avviene in una fune flessibile o catenella per tutto di uniforme figura e densità animata dalla gravità, perchè essa è appunto una catenaria di forze uguali. Nelle cicloide si ha

$$\varphi = \frac{1}{2r-x} \cdot \sqrt{\frac{r}{2x}}$$

132. *Trovare la legge delle forze φ in una catenaria semicircolare col diametro orizzontale.* Sia l'equazione del circolo $y = \sqrt{(2rx - x^2)}$, troveremo $\varphi = \frac{ar}{(r-x)^2}$: di qui si ricava, che le forze ai diversi punti debbono essere in ragione inversa duplicata delle depressioni dei punti sotto il diametro orizzontale.

133. **Problemi della prima specie.** *Una catenaria è animata da forze che sono in ragione inversa sudduplicata degli archi fra i punti, ove sono applicate le forze, ed il punto più basso: trovate l'equazione della catenaria.* L'equazione $\varphi = \frac{m}{\sqrt{s}}$ esprime la data condizione. Servendoci della equazione (1) abbiamo

$$m \int \frac{ds}{\sqrt{s}} = a \frac{dx}{dy} :$$

dunque

$$2m\sqrt{s} = a \frac{dx}{dy} .$$

Facendo $\frac{2m}{a} = \sqrt{n}$ sarà

$$\frac{dx}{dy} = \sqrt{ns} ; \frac{dx^2 - dy^2}{dy^2} = 1 + ns = \frac{ds^2}{dy^2} ;$$

$$dy = \frac{ds}{\sqrt{(1+ns)}} ; y = \frac{2}{n} \sqrt{(1+ns)} + C .$$

Quando

$y = 0$, abbiamo $s = 0$:

dunque

$$C = -\frac{2}{n} ;$$

$$\left(y + \frac{2}{n}\right)^2 = \frac{4}{n^2} (1 + ns) ;$$

$$y^2 + \frac{4y}{n} = \frac{4s}{n} ; \quad \frac{2ds}{n} = ydy + 2 \frac{dy}{n} ;$$

$$\frac{4}{n^2} (dx^2 + dy^2) = \left(y + \frac{2}{n}\right)^2 dy^2 ;$$

$$\frac{4}{n^2} dx^2 = \left(y^2 + \frac{4y}{n}\right) dy^2 ; \quad dx = \frac{n}{2} \sqrt{y^2 + \frac{4y}{n}} dy ;$$

equazione che integrata, com'è facile, ci darà l'equazione domandata tra y, x .

134. Una catenaria è animata nei suoi punti da forze, che sono come l'elevazioni di questi punti sul punto più basso, trovare l'equazione di questa curva. La condizione è espressa da $\varphi = mx$. La (1) ci dà

$$\frac{dx}{dy} = \frac{m}{a} \int x ds = n \int x ds \quad \text{facendo} \quad \frac{m}{a} = n$$

$$\frac{d^2x}{dy} = n x ds ; \quad \frac{d^2x}{dy \sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = nx ;$$

$$\frac{dx d^2x}{dy \sqrt{(dx^2 + dy^2)}} = n x dx ; \quad \frac{\sqrt{(dx^2 + dy^2)}}{dy}$$

$$= \frac{nx^2}{2} + 1 ; \quad \frac{dx}{dy} = \sqrt{\left(\frac{n^2 x^4}{4} + nx^2\right)} ; \quad \frac{2dx}{x \sqrt{n \sqrt{(nx^2 + 4)}}} = dy$$

$$y = \frac{1}{2\sqrt{n}} \int \left(\frac{\sqrt{(nx^2 + 4)} - 2}{\sqrt{(nx^2 + 4) + 2}} \right) dx + C .$$

135. Catenaria omogenea. Rettificazione di essa.

Supponiamo la catenaria RAT, come nella pagina 147, sospesa in due punti R, T posti sulla linea orizzontale RT, che sia animata dalla gravità, che diremo uno, e che il peso di una porzione qualunque AG computata dal punto più basso A fino ad uno di coordinate $AD=x, DG=y$ sia proporzionale ad AG o s : l'equazione (1) ci darà

$$\frac{a}{s} = \frac{dy}{dx};$$

di qui

$$\frac{a^2+s^2}{s^2} = \frac{dx^2+dy^2}{dx^2} = \frac{ds^2}{dx^2}; \quad dx = \frac{sds}{\sqrt{(s^2+a^2)}}.$$

Integrando, ed avvertendo, che deve essere insieme $x=0$, $s=0$ avremo

$$x+a = \sqrt{(a^2+s^2)}; \quad s = \sqrt{(x^2+2ax)},$$

che ci mostra essere la nostra catenaria rettificabile.

136. Equazione della catenaria. Troviamo l'equazione fra x, y . Avevamo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{s}{a}; \quad \frac{dx^2+dy^2}{dy^2} = \frac{a^2+s^2}{a^2};$$

$$\frac{ds^2}{dy^2} = \frac{a^2+s^2}{a^2}; \quad dy = \frac{ads}{\sqrt{(a^2+s^2)}}.$$

Integrando ed avvertendo, che $y=0$ dà $s=0$ avremo

$$(a) \quad \frac{y}{a} = l \frac{s + \sqrt{(a^2+s^2)}}{a}; \quad \frac{y}{a} = \frac{s + \sqrt{(a^2+s^2)}}{a};$$

$$(b) \quad \frac{-y}{a} = \frac{a}{s + \sqrt{(a^2+s^2)}} = \frac{\sqrt{(a^2+s^2)} - s}{a}$$

sottraendo la (b) da (a) avremo

$$s = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{y}{a}} - e^{-\frac{y}{a}} \right).$$

Avendo

$$\frac{s}{a} = \frac{dx}{dy};$$

avremo

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{2} \left(e^{\frac{y}{a}} - e^{-\frac{y}{a}} \right).$$

Integrando, e ritenendo $x = 0$ quando $y = 0$, troveremo

$$x + a = \frac{a}{2} \left(e^{\frac{y}{a}} + e^{-\frac{y}{a}} \right);$$

equazione domandata.

137. Ma si può avere sotto altra forma. In fatti avendosi (§. 135) $s = \sqrt{x^2 + 2ax}$, e $\frac{dy}{dx} = \frac{a}{s}$; sostituendovi il valore antecedente di s avremo

$$dy = \frac{adx}{(\sqrt{x^2 + 2ax})},$$

che integrata ci darà

$$y = a \ln \frac{(x+a+\sqrt{x^2+2ax})}{a}.$$

138. Dove la catenaria si confonda colla cicloide, e colla parabola. L'equazione più volte ripetuta $\frac{dx}{dy} = \frac{s}{a}$

ci dà $sdy = adx$. Si supponga ora la curva nelle massime vicinanze del punto più basso talchè la x sia piccolissima. In tal caso la s si può dire prossimamente uguale alla y e perciò nell'equazione antecedente si potrà scambiare l'una nell'altra: onde avremo $sds = adx$, $ydy = adx$. La prima è l'equazione differenziale della cicloide; la seconda è l'equazione differenziale della parabola: dunque verso il punto più basso la catenaria si può supporre o un arco cicloidale, o un arco parabolico. Questo secondo caso è stato già ricavato nel (§. 131). Tutto ciò che è stato detto della curva funicolare vale per la curva formata di latercoli rigidi infinitesimi; purchè si suppongano le forze voltate dalla parte della concavità della curva, e questo caso, come vedremo, forma l'elemento fondamentale dell'equilibrio degli archi, delle volte, e delle cupole, supposto fra le parti il solo contrasto senza attrito, e senza forze di cementi.

CAP. VII.

Equilibrio e spinta dei poligoni.

139. Di più travi connesse a foggia di poligono si compongono i tetti, i ponti di legno, le armature dei palchi, ed altre opere di simil fatta. Le travi pel proprio peso, e pel carico sovrapposto si spingono e si premono scambievolmente, ed insieme spingono e premono i sostegni, che sollevandosi da terra sostengono il poligono alle estremità ove è aperto. Questi sostegni in questo e nei simili casi si chiamano *piediritti*. Non si tralascia di commettere le travi quanto meglio si può per impedire il chiudersi, o l'aprirsi degli angoli: ma poichè queste commessure non hanno forza nè molto gagliarda nè molto durevole, così giova cercare in primo luogo come possa darsi al poligono tal forma, che le travi si equilibrino fra loro stesse. Cercasi in secondo

luogo la spinta, che il poligono così equilibrato esercita sui piedritti affine di proporzionarvi la loro resistenza.

140. Per queste ricerche non abbiamo che a riportarci ai paragrafi antecedenti pei capi 4°, 5°, nei quali si parla dell'equilibrio dei poligoni funicolari, perchè da questi si ricava la soluzione generale dei due problemi accennati, e di più altri, che in tale argomento potrebbero offrirsi. Qui non faremo, che applicare quella teoria ad alcuni casi più ovvi nella pratica. Nel che supporremo, che il tetto, o poligono qualunque sia simmetrico attorno la verticale di mezzo così per la forma, che per la distribuzione del peso. I pesi poi dei travi, e quelli di cui possano essere gravati si potranno sempre ridurre ad agire solamente sugli angoli. Infatti riuniti i propri pesi, ed i pesi di cui siano gravati nei loro centri di gravità per mezzo della teoria delle forze parallele, i detti pesi si potranno decomporre in due da applicarsi agli estremi del trave in proposito, o da applicarsi ai vertici degli angoli del poligono, che si trovano nei detti estremi.

141. **Poligono triangolare** BCD; il peso applicato



al colmo C sia 2P, il peso applicato a ciascuno dei punti B, D sia V; l'angolo BCK = m . La spinta orizzontale agli appoggi B, D sarà $P \tan m$, e la spinta verticale $P \rightarrow V$. Infatti le componenti di 2P in C secondo i

lati CB, CD, che fanno angoli uguali con 2P sono $\frac{P}{\cos m}$.

Questo $\frac{P}{\cos m}$ si applichi in B secondo BF e si decomponga in due l'una orizzontale, l'altra verticale: la prima sarà

$$\frac{P}{\cos m} \sin. FBM = \frac{P}{\cos m} \sin. (90 + KBC) =$$

$$\frac{P}{\cos.m} \cos. KBC = \frac{P}{\cos.m} \sin.m = P \tan.m$$

La verticale sarà

$$\frac{P}{\cos.m} \cos.FBM = \frac{P}{\cos.m} \cos. (90 - KBC) = \frac{P}{\cos.m} \cos.m = P$$

142. Quando la larghezza BD rimanga la stessa, e le travi siano cariche uniformemente, ed in proporzione della loro lunghezza, crescendo l'elevazione del tetto scema la spinta orizzontale pei termini B, D, e cresce la spinta verticale. Infatti essendo allora P, V proporzionali a BC ossia

a $\frac{BK}{\sin.m}$, ed essendo la spinta orizzontale $P \tan.m$ come

$\frac{BK}{\sin.m} \tan.m = \frac{BK}{\cos.m}$, si vede che al sollevarsi del colmo

C s'impiccolisce l'angolo m , perciò diminuisce $\sin.m$, e cresce $\cos.m$: dunque cresce la spinta verticale e diminuisce l'orizzontale.

143. **Poligono quadrangolare.** Sia il tetto quadrangolare ABDE, il peso all'angolo B sia Q, il peso al termine A sia V, o l'angolo $ABM = n$. La spinta orizzontale negli appoggi A, E sarà $= Q \tan.n$, e la spinta verticale $= Q - V$. Infatti si decomponga il peso Q in due forze l'una secondo BA, l'altra secondo BK, sarà la prima

$$\frac{Q \sin.MBK}{\sin.ABK} = \frac{Q \sin.90^\circ}{\sin(90^\circ - n)} = \frac{Q}{\cos.n};$$

l'altra sarà

$$\frac{Q \sin.n}{\sin(90^\circ - n)} = Q \tan.n;$$

questa agisce da fuori in dentro, cioè da B verso D. La

forza $\frac{Q}{\cos.n}$ si porti in A e si decomponga in due l'una orizzontale l'altra verticale: sarà la prima $\frac{Q}{\cos.n} \operatorname{sen}.n$, ossia $Q \operatorname{tang}.n$, ed agirà da dentro in fuori: la verticale sarà $\frac{Q}{\cos.n} \cos.n = Q$.

144. Poligono pentagono. Sia il tetto pentagono ABCDE; il peso al colmo C sia $2P$; all'angolo B sia Q e al termine A = V. L'angolo BCK = m , l'angolo ABM = n . Abbiamo, che la condizione (§. 120) dell'equilibrio è, che la tensione orizzontale è uguale per tutto il poligono, e che questa è espressa da ciascuna forza applicata a ciascun angolo divisa per la somma delle cotangenti degli angoli, che essa fa coi lati contigui del poligono. Ora la detta quantità nel vertice C è evidentemente $\frac{2P}{2\cot.m}$, ed in B è

$$\frac{Q}{\cot.ABM + \cot.MBC} = \frac{Q}{\cot.n + \cot.m};$$

dunque abbiamo

$$\frac{P}{\cot.m} = \frac{Q}{\cot.n + \cot.m};$$

ossia

$$P\cot.n - P\cot.m = Q\cot.m,$$

$$P\cot.n = (P + Q)\cot.m, P\operatorname{tang}.m = (P + Q)\operatorname{tang}.n.$$

I due membri di questa equazione ci danno due espressioni della costante tensione orizzontale.

145. Le componenti uguali di $2P$ secondo CB, CD sono $\frac{P}{\cos.m}$. Considerando la componente secondo CB s'intenda applicata in B secondo BF prolungamento di CB, e si de-

componga in due l'una verticale secondo la BM, e l'altra orizzontale: la prima come si è veduto sarà P (§. 441), l'altra $P \tan m$; con che ritorna la costante tensione orizzontale. Si trovi la componente secondo BA di $P \rightarrow Q$ applicata in Q, e l'altra orizzontale secondo BK. Sarà la prima

$$\frac{(P \rightarrow Q) \sin MBK}{\sin ABK} = \frac{P \rightarrow Q}{\sin (n \rightarrow MBK)} = \frac{P \rightarrow Q}{\cos n} :$$

l'altra componente sarà

$$\frac{(P \rightarrow Q) \sin n}{\sin (n \rightarrow MBK)} = (P \rightarrow Q) \tan n :$$

ove ritorna l'altra superiore espressione della costante tensione orizzontale agente da fuori in dentro. La componente

$\frac{P \rightarrow Q}{\cos n}$ secondo BA s' intenda applicata in A, e si decomponga in due l'una verticale l'altra orizzontale. Sarà la prima

$$\frac{P \rightarrow Q}{\cos n} \cos n = P \rightarrow Q ,$$

l'altra sarà

$$\frac{(P \rightarrow Q)}{\cos n} \sin n = (P \rightarrow Q) \tan n$$

agente da dentro in fuori; dunque sugli appoggi A, E si hanno le pressioni verticali $P \rightarrow Q \rightarrow V$, e gli sforzi orizzontali espressi da $P \tan m$, o da $(P \rightarrow Q) \tan n$.

146. Poligono di un qualunque numero di lati. Se il poligono fosse cresciuto di due lati uno da una parte congiunto in A, e l'altro dall'altra congiunto in E, e che al vertice dell'angolo in A fosse stato applicato un peso V, come si è posto di sopra, che col lato congiunto in A avesse fatto l'angolo r , sarebbe stato facile trovare la pressione

verticale, e l'azione orizzontale nei due appoggi agli estremi dei detti lati. In fatti al punto A è applicato il peso $P \rightarrow Q \rightarrow V$: si decomponga in due forze l'una secondo il lato, l'altra orizzontale; quella secondo il lato sarà

$$\frac{(P \rightarrow Q \rightarrow V) \text{sen.} 90^\circ}{\text{sen.}(r \rightarrow 90^\circ)} = \frac{(P \rightarrow Q \rightarrow V)}{\cos.r}.$$

Lo sforzo orizzontale sarà

$$\frac{(P \rightarrow Q \rightarrow V)}{\cos.r} \text{sen.} r = (P \rightarrow Q \rightarrow R) \text{tang.} r.$$

Questo è lo stesso che $P \text{tang.} m$, e $(P \rightarrow Q) \text{tang.} n$. Infatti per la condizione dell'equilibrio del poligono funicolare di forze parallele abbiamo

$$\frac{2P}{2\cot.m} = \frac{Q}{\cot.n - \cot.m} = \frac{V}{\cot.r - \cot.n}.$$

Da questa serie di rapporti uguali diremo, che la somma di tutti i primi termini dei rapporti sta alla somma dei secondi termini, come il primo al secondo termine del primo rapporto, dunque $P \rightarrow Q \rightarrow V: \cot.r = P: \cot.m$, d'onde $P \text{tang.} m = (P \rightarrow Q \rightarrow V) \text{tang.} r$, ciò che si doveva provare.

La forza $\frac{P \rightarrow Q \rightarrow V}{\cos.r}$ secondo l'ultimo lato si trasporti ad essere applicata al suo estremo, e si decomponga in due l'una verticale che sarà

$$\frac{P \rightarrow Q \rightarrow V}{\cos.r} \cos.r = P \rightarrow Q \rightarrow V$$

e l'altra orizzontale che sarà

$$\frac{P \rightarrow Q \rightarrow V}{\cos.r} \text{sen.} r = (P \rightarrow Q \rightarrow V) \text{tang.} r$$

Da tutto ciò si ricava, che qualunque sia il numero dei lati del poligono sostenuto nei suoi estremi ove è aperto, le pressioni verticali su ciascuno di questi punti estremi è la metà del peso del poligono, e che la spinta orizzontale è questo stesso peso moltiplicato nella tangente dell'angolo, che esso fa colla direzione del lato estremo, spinta orizzontale che può essere espressa dalla tangente dell'angolo che ciascun lato del poligono fa colla verticale moltiplicata per la somma di tutti i pesi applicati ai vertici degli angoli del poligono cominciando da quello che è principio del lato in proposito, e andando al di sopra fino all'estremo del lato orizzontale, o fino al punto culminante, dove si deve prendere la metà del peso. Si ricava ancora, che ad ogni vertice degli angoli del poligono vi sono sforzi orizzontali uguali ed opposti. Tutti questi casi si sono distinti, e si sono trattati appositamente; ma ciò per solo esercizio di trattar forze nel trasportarle, e trovare l'equivalenti. Le dette verità si sono dimostrate nel (§. 124). Ivi si è dimostrato, che agli estremi del poligono funicolare di forze parallele simmetrico da una parte e dall'altra rispetto una verticale, che lo divide in mezzo, si fanno sforzi verticali ciascuno uguale alla metà delle forze del poligono, e similmente in ogni vertice degli angoli del poligono. Si è dimostrato ancora, che lo sforzo orizzontale costante può rappresentarsi dalla somma delle forze, che in un ciascun vertice degli angoli del poligono vi si potevano intendere applicate, moltiplicata per la tangente dell'angolo che la detta somma faceva con uno dei due lati, che si univano in quel vertice.

147. Sia il tetto pentagono ABCDE fuori d'equilibrio, e per impedire la mossa degli angoli B, D sia aggiunta la corda o piana BD, la quale sia di peso $2R$. La componente secondo CB del peso $2P$ collocato in C produrrà in B lo sforzo orizzontale da dentro in fuori uguale a $P \tan g. m$ ed un peso verticale P ; dunque in B vi è un peso

$P \rightarrow Q \leftarrow R$ secondo BM. La componente di questo peso secondo BK cioè lo sforzo orizzontale da fuori in dentro sarà

$$(P \rightarrow Q \leftarrow R) \operatorname{tang} . n .$$

Nel caso di disquilibrio vi farà una differenza fra questo e lo sforzo orizzontale opposto; onde esisterà una forza $\pm P \operatorname{tang} . m \mp (P \rightarrow Q \leftarrow R) \operatorname{tang} . n$, e questa nei due punti B, D; quindi la piana dovrà sostenere queste due forze uguali e contrarie, che agiranno ambedue o da dentro in fuori, o da fuori in dentro.

148. Sforzo che le travi possano soffrire per l'azione delle forze. Abbiamo sempre supposto, che le travi fossero d'invincibil fermezza: ma potrebbero esse spezzarsi in virtù del peso sovrapposto, o del proprio, e potrebbero cedere o allo strappamento, o alla compressione; e questi formano quattro casi.

149. Il primo è, che essendo una trave conficcata in una estremità, un peso applicato verticalmente ad una certa distanza la possa spezzare; il secondo, che una trave essendo sostenuta nelle due sue estremità fra queste si possa spezzare. Il terzo è, che la trave per due forze applicata alle due sue estremità secondo la sua stessa direzione possa essere strappata. Il quarto è la compressione che possa subire onde piegarsi. Queste ricerche formeranno lo scopo del seguente capo, col quale completeremo il capo presente. Imperciocchè per impedire, che la piana BD si spezzi nel punto medio K, un colonnetto si fissa in una sua estremità in questo punto, e si sostiene dal culmine C nell'altra estremità. E per impedire lo spezzamento della piana AD allo stesso modo si fisseranno due colonnetti BM, DN. Ora per questo è necessario sapere gli sforzi sostenuti da questi colonnetti, che saranno uguali alle forze con cui le piane tendono a spezzarsi o nella sezione media K, o in due sezioni come M, ed N. Anche la piana dalle due forze all'estremità potrà o strapparsi, o piegarsi per la compressione.

CAP. VIII.

Resistenza dei solidi contro le diverse maniere di agire delle forze su di essi.

150. Resistenza del solido contro la forza che tende a strapparlo. Un vincolo tenace stringe fra loro le particelle dei corpi solidi opponendo gagliarda resistenza alla forza, che cerchi di separarle. Ognun vede, che questa resistenza deve variare non solo nelle diverse specie dei solidi, ma ben anche secondo le varie loro dimensioni, e secondo il vario modo col quale la forza si applica a tentare la separazione. Se tutti i solidi fossero perfettamente omogenei ed inflessibili, la resistenza d'ogni sezione potrebbe riguardarsi come la risultante di tante forze uguali, e parallele quanti sono gli elementi uguali della sezione, onde sarebbe uguale all'area della sezione, e raccolta nel suo centro di gravità. Allora tutte le varietà dipendenti dalle dimensioni del solido, e dal modo di applicazione della forza, potrebbero geometricamente determinarsi. Or quantunque mai non s'incontri questa perfetta ed uguale rigidità delle fibre, pur giova di assumerla come ipotesi, e vedere quali conseguenze derivino. Consultando poi l'esperienza, e confrontandola coi risultati dell'ipotesi ci si mostrerà quello che devesi attribuire e alla eterogeneità delle parti, ed alla imperfetta loro elasticità.

151. Posto ciò s'immagini un solido prismatico fitto orizzontalmente nel muro in una sua estremità, e tirato dall'altra con forza P , che tenda a strapparlo in una sezione. Sia questo solido tale, che il contorno di una sezione qualunque verticale sia simmetrico da una parte e dall'altra di una retta condotta in mezzo, sulla quale dal punto più alto siano computate le ascisse. Sia una ascissa x , e la

ordinata y ortogonale. Esprima poi k la tenacità di ciascun elemento della detta sezione. Ciò posto $2ydx$ esprimerà l'elemento rettangolare della sezione dopo l'ascissa x , e $2kydx$ sarà la sua tenacità, e la tenacità di tutta la sezione sarà $2kfydx$, che dovrà essere uguale a P per avere il limite della resistenza: quindi l'equazione $P = 2kfydx$ esprimerà la relazione fra la resistenza del solido, e la forza che tende a strapparli nella data sezione, talchè se la P cresce di poco avrà il suo effetto; quindi nei solidi omogenei, la resistenza alla forza distraente è proporzionale alle sezioni normali a questa forza. Questa resistenza si dice *assoluta*.

152. Dall'esperienza si ricava, che i metalli deviano da questa legge non però di molto. Nei legni l'abberazione è maggiore, ed affatto irregolare.

153. **Resistenza dei solidi alla rottura essendo essi in una estremità.** Si consideri un solido prismatico come nel caso antecedente, che conficcato in una estremità nel muro sia orizzontale. All'altra estremità ad una distanza c dal muro sia applicato un peso che tenti di spezzarlo nella sezione al muro facendo ruotare la parte dal lato del peso intorno alla retta o punto inferiore della detta sezione. Si ritengano le denominazioni antecedenti, ma computando le ascisse dal punto inferiore o dalla retta della rotazione. La tenacità $2kydx$ del rettangolo resisterà col momento $2kyxdx$, e la resistenza totale sarà $2kfyxdx$, che dovrà essere uguale al momento Qc del peso Q : dunque

$$Qc = 2kfyxdx, Q = \frac{2k}{c} \int yxdx.$$

154. **Applicazione.** Se il solido è un parallelepipedo rettangolare, come sogliono essere le travi, la sua altezza sia a , e la larghezza l , avremo $Q = \frac{kla^2}{2c}$. Ciò si avrà se si fisserà $y = \frac{l}{2}$. Si vede, che la resistenza è in ragione com-

posta diretta del quadrato dell'altezza e della larghezza, ed inversa della lunghezza. Questa resistenza si dice *rispettiva*.

155. **Confronto delle due resistenze.** Se nelle travi si confronti la resistenza antecedente (§. 151) con questa, si troverà, che la resistenza assoluta sta alla rispettiva come la lunghezza alla metà dell'altezza.

156. **Si considera il peso della trave.** Se si vuol tenere a conto il peso della trave, che anche esso tende a spezzarla, si dica V : questo collocato nel suo centro di gravità al punto medio della trave tenderà insieme col peso Q da spezzarla col momento $\frac{1}{2} Vc$; dunque avremo

$$Q + \frac{1}{2} V = \frac{2k}{c} \int xy dx.$$

157. **Altra ipotesi.** Invece dell'ipotesi fatta se ne ammetto un'altra, che sembra convenir meglio ai corpi tessuti di fibre flessibili, e capaci d'allungarsi per lo stiramento. Allorchè il peso Q fa forza per girar la sezione intorno al punto o linea inferiore, gli elementi contigui a questo lato non soffrono alcuna distrazione, gli altri sono di più in più distratti secondo che si va verso la linea o punto culminante. Nell'attuale ipotesi la resistenza alla rottura è in ragione della distanza dal punto, o retta più bassa. Se dunque si ponga k la resistenza nel punto o punti supremi all'altezza a sopra il punto, o retta più bassa, e si ritenga x l'ascissa computata dal punto inferiore, a questa ascissa, secondo la nuova ipotesi, corrisponderà la resistenza $\frac{kx}{a}$, ed il momento della resistenza pel rettangolo $2ydx$ sarà

$$\frac{2k}{a} x^2 y dx.$$

Uguagliando al momento Qc la somma dei momenti della

sezione avremo

$$Q = \frac{2k}{ac} \int x^2 y dx.$$

Da questa si ricava, che nelle travi il rapporto fra la resistenza assoluta, e la rispettiva è quello della lunghezza al terzo dell'altezza. Sussiste però anche in questa ipotesi fra le resistenze rispettive la proporzione del (§. 154).

158. Si trova l'equazione della figura che un solido prende nell'incurvarsi nello stato prossimo alla rottura, e ciò giusta la seconda ipotesi. Sia



ABDC il profilo del solido prismatico, e questo pel carico del peso Q si sia piegato in ABdc. Riferiamo la curva Amc all'asse Ap colle coordinate $Ap=x'$, $pm=y'$, conservando le superiori denominazioni. Siano i punti n, m infi-

nitamente prossimi, e li profili mh, nk delle sezioni fatte normalmente alla curva Amc concorrano in K, sarà $Kn=Km=R$ il raggio osculatore al punto m .

159. Consideriamo ora l'equilibrio del peso Q colla tenacità della sezione mh , la quale dalla situazione mi parallela ad nk è condotta alla situazione mh per lo stiramento delle fibre, ed è in sul punto d'essere strappata. Mentre il peso Q tende a far girare la sezione mh intorno al punto m scostandola sempre più dalla situazione mi , e così tendendo a strappare le fibre già allungate del solido, ognuna di queste fibre, giusta la seconda ipotesi, resiste con forza tanto maggiore quanto è maggiore la sua distrazione: quindi nel punto e sarà proporzionale ad eq ; e perchè si ha $Kn:mn::me:eq$, se prendiamo per costante l'archetto nm della curva, sarà eq proporzionale ad $\frac{me}{Km}$, ossia ad $\frac{x}{R}$. Pertanto la resistenza

nel punto i ove $x = a$ sarà proporzionale ad $\frac{a}{R}$; dunque sarà assolutamente $\frac{ra}{R}$, intendendo per r il rapporto costante. Esprimeremo questa resistenza per $\frac{h}{R}$; e la resistenza nel punto e sarà $\frac{hx}{aR}$; perciò la resistenza del trapezio elementare corrispondente al punto e sarà $\frac{hx}{aR} \cdot 2ydx$, ed il momento di essa rispetto al punto m sarà $\frac{2h}{aR} x^2 y dx$, e la somma dei momenti per tutta sezione di profilo mi sarà

$$\frac{2h}{aR} \int x^2 y dx.$$

Essendo il solido prismatico, $\int x^2 y dx$ è la stessa per qualunque sezione del prisma e perciò per tutta la curva $Anmc$: facendo dunque

$$\frac{2h}{a} \int x^2 y dx = E$$

sarà $\frac{E}{R}$ il momento della resistenza della sezione di profilo mi . D'altronde il momento del peso Q relativamente al punto m , intorno a cui tende a fare la rotazione è $Q(c-y')$: dunque $Q(c-y') = \frac{E}{R}$. Vedremo in seguito, che questa è l'equazione di una lastra elastica piegata da un peso.

160. Resistenza dei solidi allo spezzamento essendo sostenuti nelle due estremità. Supponiamo il solido sostenuto nelle due sezioni estreme, e dal punto medio penda il peso T , che sia in sullo spezzare il solido nella sezione verticale, che passa pel detto punto. Ciascuno degli appoggi sostiene la metà del peso T : perciò sussisterà l'equi-

librio se rimossi i due appoggi intenderemo ad essi sostituite due forze ciascuna metà di T , che traendo all'insù siano in sul rompere il solido nella detta sezione media. Il momento di ciascuna delle dette forze è

$$\frac{1}{2} T \cdot \frac{1}{2} c, \text{ ossia } \frac{1}{4} Tc,$$

ritenendo, che c sia la lunghezza del solido. Il trovato momento deve essere uguale al momento $2kfyx dx$ (§. 153) della resistenza, che si fa forte contro ciascuno dei detti momenti alle estremità: dunque abbiamo per la resistenza domandata $T = \frac{8k}{c} \int xy dx$.

161. Confrontando questa col momento della resistenza relativa (§. 153) $\frac{2k}{c} \int xy dx$ si vede che è quadrupla: dunque un solido sostenuto nelle estremità può portare quadruplo peso di quello, che porterebbe quando fosse fitto nel muro da una sola sua estremità; e questo peso, quando si tratta di travi, è proporzionale alla larghezza, al quadrato dell'altezza, ed inversamente alla lunghezza.

162. **Caso che il peso non sia nel mezzo.** Si supponga ora, che il peso T non sia nel mezzo, ma disti di x da una estremità: in tal caso questa estremità farà forza avuta dalla proporzione delle forze parallele

$$f: T = c - x: c, \text{ cioè } f = T \frac{(c-x)}{c},$$

ed all'altra estremità avremo la forza $f' = \frac{Tx}{c}$. Tolti i sostegni, queste saranno le forze all'insù, che tenteranno spezzare il solido nella sezione, ove è il peso, vincendo il momento della resistenza $2kfyx dx$: dunque in caso d'equilibrio avremo

$$\frac{T(c-x)}{c} x = 2k \int y x dx, \text{ e } T = \frac{2kc}{x(c-x)} \int y x dx :$$

quindi tanto maggior peso può portare la trave, quanto più il punto di sospensione del peso si scosta dal mezzo, variando questo peso in ragione inversa del prodotto $x(c-x)$, che si fa tanto minore quanto più la x è minore di $\frac{1}{2} c$.

163. Se il solido non è posto orizzontalmente si risolverà il peso T in due forze, l'una normale al solido, l'altra secondo la sua lunghezza, e si terrà solamente conto della prima nel valutare colla formola antecedente la resistenza.

164. **Se si vuol tener conto anche del proprio peso V della trave** si rifletterà, che ognuno degli appoggi ne sostiene la metà, e che quindi tolti gli appoggi si applicheranno due forze ciascuna $\frac{1}{2} V$, che tenderanno a spezzare la trave nel mezzo col momento $\frac{1}{2} V \cdot \frac{1}{2} c = \frac{1}{4} Vc$. Ma siccome contrasta a questo sforzo il peso della mezza trave il quale può intendersi applicato al punto medio: quindi si oppone il momento $\frac{1}{2} V \cdot \frac{1}{4} c = \frac{1}{8} Vc$: così il momento proveniente in una estremità dal peso V rimane

$$\frac{1}{4} Vc - \frac{1}{8} Vc = \frac{1}{8} Vc$$

che unendosi al momento $\frac{1}{4} Tc$ ci darà (§. 160)

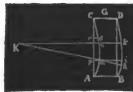
$$\frac{1}{4} Tc + \frac{1}{8} Vc = 2k \int xy dx ,$$

ossia

$$T + \frac{1}{2} V = \frac{8k}{c} \int xy dx .$$

165. Resistenza del solido alla compressione. Immaginiamo un solido prismatico retto verticalmente sul suolo, su cui saldamente posi, e gravato in cima d'un peso G . Qui se l'omogeneità e la rigidezza delle parti fosse perfetta, l'azione del peso, premendo le sezioni del solido l'una contro l'altra, aiuterebbe la tenacità, anziché farle contrasto. A spiegar dunque come avvenga di fatto, che le colonne sotto gravi pesi s' infrangono, è forza ricorrere a quella flessibilità, della quale le fibre de' solidi qual più qual meno partecipano, e richiamare a questo luogo la seconda ipotesi (§ 157). Allora ogni piccolo difetto d' omogeneità potrà fare, che la colonna cedendo o dall' una parte o dall' altra si curvi conducendosi ad uno stato prossimo alla rottura.

166. Equazione della curva in cui si piega il solido cedendo alla compressione. Rappresenti la figura



la curva $CnmA$, nella quale si pieghi il solido gravato al di sopra di un peso. Facciamo $Cp = x'$, $pm = y'$, ed il raggio osculatore in m o Km sia R . Ripetendo qui la dimostrazione (§. 159) ritroveremo, che il momento della

resistenza sarà espressa da $\frac{E}{R}$, ove E è uguale alla quantità

$\frac{2h}{a} \int x'y dx$ costante per tutta la curva. Dall'altra parte il

momento del peso è $G \cdot pm = Gy'$: dunque $Gy' = \frac{E}{R}$, che

in seguito vedremo essere l'equazione della curva, in cui si piega una lastra elastica ferma sul suolo in una estremità, e premuta verticalmente nell'altra. Integriamo l'equazione avuta, e poichè per E non si porrà il suo valore, si cambi la y' in y . Essendo la ds costante avremo

$$R = - \frac{dsdx}{d^2y} ;$$

onde la nostra equazione diventerà $Ed^2y = -Gydsdx$. Supponiamo l'inflessione piccolissima, onde si possa fare $dx=ds$, allora l'equazione antecedente ci darà

$$Gy + \frac{Ed^2y}{dx^2} = 0 .$$

Sia f l'ordinata massima della curva $CnmA$. Si moltiplichi l'equazione antecedente per $2dy$, e s'integri, avremo

$$Gy^2 + \frac{Edy^2}{dx^2} = C ,$$

ove C è la costante arbitraria. Se l'equazione si porti al punto ove è l'ordinata massima $y = f$ si troverà $\frac{dy}{dx} = 0$, perchè il coefficiente differenziale $\frac{dy}{dx}$ esprime la tangente d'inclinazione all'asse delle x della tangente in un punto qualunque della curva, al quale asse nel nostro caso è parallela: da ciò avremo $C = Gf^2$, e quindi

$$\frac{Edy^2}{dx^2} = G(f^2 - y^2) ,$$

ossia

$$dx = \sqrt{\frac{E}{G} \cdot \frac{dy}{f^2 - y^2}} .$$

Integrando, ed avvertendo, che $x = 0$ da $y = 0$, troveremo

$$x = \sqrt{\frac{E}{G}} \text{arc. sen.} \left(\frac{y}{f} \right) ,$$

ovvero

$$y = f \text{ sen.} x \sqrt{\frac{G}{E}} .$$

Se vi si pone $x = CA = e$ deve tornare $y=0$: dunque

$$\text{sen.} e \sqrt{\frac{G}{E}} = 0. \text{ quindi } e \sqrt{\frac{G}{E}} = \pi$$

essendo π mezza circonferenza: dunque

$$G = \frac{E\pi^2}{e^3}.$$

Da ciò si ricava, che per arrivare a piegare la colonna di un cedimento benchè menomo, dovrà essere per lo meno il peso $G = \frac{E\pi^2}{e^3}$: laonde la formola $\frac{E\pi^2}{e^3}$ potrà aversi per adeguata espressione della resistenza delle colonne.

167. **Abbia la colonna la forma di un parallelepipedo.** Sia l' altezza $AC = c$, e la larghezza $AB = a$, o l'altra dimensione in dietro, o la profondità sia b . Avvertasi alla differenza fra le due dimensioni a, b ; delle quali la prima è posta nel piano in cui giace la curvatura della colonna, e l'altra è perpendicolare a quel piano. Ora la sezione trasversale di tal colonna essendo un rettangolo di lati a, b avremo

$$\int x^2 y dx = \frac{1}{3} a^3 b,$$

e quindi

$$E = \frac{2}{3} a^3 b h.$$

Sostituendo questo valore nella formola $\frac{E\pi^2}{e^3}$, espressione generale della resistenza delle colonne, avremo

$$\frac{2a^3 b h \pi^2}{3e^3}.$$

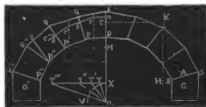
168. Se le sezioni delle colonne, che si paragonano fra

loro, fossero simili, siccome b sarebbe proporzionale ad a , così la resistenza sarebbe proporzionale ad $\frac{a^3}{c^3}$. E così il peso cui può reggere una colonna cilindrica sarà in ragione composta del cubo del diametro, e dell'inversa del quadrato dell'altezza.

CAP. IX.

Equilibrio degli archi col solo contrasto delle parti.

169. Come è formato l'arco, e sue denominazioni.



Sia un arco come in figura composto di parti come DEQP, PQQ'P' l'una addossata all'altra senza forza di cemento e di attrito, e retta dai piediritti supposti invincibili G, G', si cercano le condizioni, onde l'arco non faccia mossa, sorretto dal solo contrasto delle dette parti.

170. Queste parti dell'arco hanno la figura di cunei senza angoli al di dentro dell'arco, e perciò ritengono il nome di *cunei*: il piano supremo verticale DE si dice *la chiave dell'arco*. Li piani dimostrati in profilo dalle rette PQ, P'Q', in cui i cunei si uniscono, e contrastano si dicono *letti dei cunei*; ed i letti ultimi in cui i cunei poggiano su i piediritti come RS si dicono *puleinari*.

171. **Riduzione dell'arco al più semplice.** Nell'arco vi è tale uniformità di figura ed omogeneità di materia, che tutto è lo stesso nella profondità dell'arco, cioè in tutta

l'estensione in dietro alla superficie veduta in figura: in guisa che le condizioni dell'equilibrio dell'intero arco sono le condizioni dell'equilibrio della detta superficie supposta pesante. La curva interna $P''DR$ si dice *intradosso*, e l'esterna $Q''ES$ si dice *estradosso*.

172. Condizione dell'equilibrio dell'arco. In ogni cuneo s'intenda riunito il peso nel suo centro di gravità come in C, C' , egli è evidente, che la condizione dell'equilibrio è, che, decomposto ciascun peso in due forze dirette ai due letti contigui, siano ad essi normali: perchè ognuna, che riuscisse obliqua, si potrebbe decomporre in due l'una normale al letto, l'altra secondo questo, e questa seconda tenderebbe a far strisciare il cuneo lungo il detto letto.

173. Rappresentanza geometrica, e valori delle forze nell'arco. Diamo una rappresentanza geometrica all'antecedente condizione per poi tradurla in calcolo. Se ED è la retta verticale, che bisega l'arco, si prolunghi, e su di essa presa una parte OX di lunghezza uguale al raggio trigonometrico r , fatto centro in O , con questo raggio si descriva un arco di circolo XV . Quindi al punto X si conduca l'infinita XT'' normale al detto raggio, o tangente al circolo in X . In ultimo dal centro O si conducano le secanti OT, OT', OT'' ec. rispettivamente parallele ai letti $PQ, P'Q', P''Q'$ ec.

174. Considerando il triangolo TOX , ed il cuneo $QPDE$ si vede, che il suo peso e le componenti normali ai due letti PQ, ED sono rispettivamente normali ai lati TX, TO, OX : quindi il triangolo, che esprime quelle tre forze, ha i lati rispettivamente normali ai detti lati del triangolo OTX : dunque le tre forze sono proporzionali a questi lati: cioè il peso del cuneo è proporzionale a TX ; la componente orizzontale normale a DE è proporzionale ad OX ; e la componente normale al letto PQ è proporzionale a TO . Similmente il peso del cuneo $PQ'P'$ e le sue componenti nor-

mali ai letti contigui PQ, P'Q' sono rispettivamente proporzionali ai lati TT', TO, T'O, e così di seguito.

175. Condizione dell'equilibrio dell'arco tradotta in calcolo. Per li due cunei PQ', P'Q'' indicando con C', C'' i loro pesi, e con P' le loro componenti normali al letto P'Q' avremo le due uguaglianze di rapporti

$$\frac{C'}{P'} = \frac{TT'}{TO}, \frac{P'}{C''} = \frac{T'O}{TT''}.$$

Moltiplicando queste due equazioni sarà

$$\frac{C'}{C''} = \frac{TT'}{TT''}:$$

si troverebbe similmente

$$\frac{C''}{C'''} = \frac{T'T''}{T''T'''}:$$

dunque il peso di un cuneo qualunque per.es. C''' è come T'T'', cioè come la differenza XT''—XT''' delle tangenti degli angoli, che le direzioni dei due letti contigui P''Q'', P'''Q''', ossia OT'', OT''' fanno colla verticale OX. E questo vale anche pel cuneo PDEQ, il di cui peso è proporzionale a TX, in cui quella differenza di tangenti diventa la sola tangente della inclinazione d'un suo letto PQ alla verticale, perchè il letto ED fa angolo nullo con questa.

176. Valori delle pressioni. Le pressioni poi dei cunei sono come le secanti degli angoli delle inclinazioni dei loro letti alla verticale.

177. Pressioni orizzontali nell'arco. Le pressioni orizzontali sono tutte uguali alla pressione alla chiave DE. Infatti si è veduto essere questa pressione come OX, o come il raggio r di trigonometria: dunque sarà uguale ad mr essendo m il rapporto costante. Ora la pressione contro un letto qualunque è come la secante del suo angolo colla verti-

cale. Si dica quest'angolo $\varnothing$, la detta pressione sarà eguale ad $m \cdot \sec \varnothing$, uguale ad $\frac{mr^2}{\cos \varnothing}$. Si decomponga questa pressione in due l'una orizzontale, l'altra verticale; avremo così la pressione normale al letto, e la componente orizzontale, cioè normale alla verticale. Ora si sa, che quando due rette siano rispettivamente normali a due altre convergenti, le due prime fanno lo stesso angolo delle due altre: dunque la pressione contro il letto, o la sua componente orizzontale fanno un angolo uguale a quello fatto dal letto colla verticale, ossia fanno l'angolo $\varnothing$: ma la pressione contro il letto è $\frac{mr^2}{\cos \varnothing}$: moltiplicata dunque questa pressione per $\frac{\cos \varnothing}{r}$ il risultamento mr ci dà, che la pressione orizzontale è appunto la pressione contro ED.

178. Peso di una porzione qualunque dell'arco cominciando dalla chiave. Abbiamo (§. 175) $C = m \cdot TX$, $C' = m \cdot TT'$, $C'' = m \cdot T'T''$, $C''' = m \cdot T''T'''$ ec. ove m è il rapporto costante. Sommando queste equazioni abbiamo

$$C + C' + C'' + C''' \text{ ec.} = m (TT' + T'T'' + T''T''' \text{ ec.}).$$

Ora il primo membro è il peso totale dell'arco cominciando dalla chiave fino ad un lotto qualunque, e la quantità fra parentesi del secondo membro è XT'' ; dunque dicendo Π quel peso, e $\varnothing$ l'angolo $T''OX$, di cui XT'' è tangente, ossia l'angolo del letto che termina l'arco, di cui si vuole il peso, avremo $\Pi = m \cdot \tan \varnothing$.

179. Da questa equazione si vede che niun letto, come ex. gr. i pulvinari, non può essere orizzontale, perchè $\tan 90^\circ$ è assurda.

180. Il coefficiente costante m è la pressione costante orizzontale, per la quale si può prendero la pressione assoluta alla chiave. Infatti mr era (§. 177) la pressione orizzontale, che è uguale ad m se si suppone uno il raggio trigonometrico.

181. Dopo ciò la pressione contro il letto di un cuneo qualunque sarà uguale alla spinta alla chiave, o alla pressione orizzontale moltiplicata per la secante, o divisa pel coseno dell'angolo fatto dal letto del cuneo colla verticale. Infatti si è veduto (§. 177), che la detta spinta è uguale ad $m \cdot \sec \theta = \frac{m}{\cos \theta}$, ove m è la spinta orizzontale (§. 180).

182. La formola $\Pi = m \cdot \tan \theta$ si ricava facilmente supponendo KH la direzione del peso Π di una porzione qualunque dell'arco dalla chiave fino ad un letto. Infatti conducendo da un punto K della detta direzione le due normali KC, KA alla chiave ed al letto indicato, saranno queste le direzioni delle pressioni componenti contro la chiave, ed il letto: ora la componente pressione m contro la chiave è uguale a

$$\frac{\Pi \sin HKA}{\sin (90^\circ + HKA)} = \frac{\Pi \sin HKA}{\cos HKA};$$

ma HKA è il complemento dell'angolo θ , che fa il letto colla verticale; dunque

$$m = \Pi \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \text{ ossia } \Pi = m \cdot \tan \theta.$$

183. **Applicazione delle teorie antecedenti.** Per fare



un'applicazione delle esposte teorie supponiamo, che essendo in un arco l'intradosso circolare coi profili dei letti secondo il raggio del circolo, si voglia determinare l'estradosso. Sia l'intradosso DPR circolare, e ai due punti

P, P' infinitamente prossimi siano condotti i raggi OP, OP'; se questi si prolunghino nell'estradosso EQQ' daranno il cuneo PP'Q'Q. Si dica θ l'angolo DOP, sarà $POP' = d\theta$. Sia

$$OP = r, OQ = r', \text{ ed } OE = k.$$

L'area POP' del settore sarà uguale ad $\frac{1}{2} r'^2 d\theta$; anche OQQ' si può considerare come un settore di raggio r' , quindi la sua area sarà $\frac{1}{2} r'^2 d\theta$; dunque il cuneo infinitesimo PQQ'P' sarà uguale ad

$$\frac{1}{2} (r'^2 - r^2) d\theta.$$

Parimenti il cuneo infinitesimo DEE'D' sarà uguale ad

$$\frac{1}{2} (k^2 - r^2) d\theta.$$

Ora il teorema (§. 175) ci dà

$$\frac{\frac{1}{2} (r'^2 - r^2) d\theta}{\frac{1}{2} (k^2 - r^2) d\theta} = \frac{\text{tang.}(\theta - d\theta) - \text{tang.}(\theta)}{\text{tang.} d\theta} \\ = \frac{d.\text{tang.}\theta}{d\theta} = \frac{1}{\cos.^2\theta};$$

dunque

$$\frac{r'^2 - r^2}{k^2 - r^2} = \frac{1}{\cos.^2\theta},$$

dalla quale abbiamo

$$r'^2 = r^2 + (k^2 - r^2) \sec.^2\theta.$$

Si può facilmente costruire questa formola, e quindi trovare per punti l'estradosso. Sia fissato il punto E, e quindi la retta EO, essendo O il centro dell'intradosso. Si conduca il raggio orizzontale OR, e da R si conduca ad unirsi nell'altra estremo ad OE la retta RF = OE. Da F si conduca l'orizzontale FG, e da O si meni una retta indefinita OQ, che si segnerà in S colla detta orizzontale. Da S si conduca ST normale ad OR. Si congiunga E con T: quindi

sulla indefinita OQ, si prenda OQ = OE, il punto Q sarà punto dell'estradosso. Infatti

$$OF^2 = FR^2 - OR^2 = k^2 - r^2.$$

Ora nel triangolo rettangolo FSO abbiamo

$$FS^2 = FO^2 \tan^2 \theta$$

dunque

$$FS^2 = (k^2 - r^2) \tan^2 \theta$$

Inoltre

$$ET^2 = EO^2 + OT^2 = k^2 + (k^2 - r^2) \tan^2 \theta;$$

ma

$$ET^2 = OQ^2;$$

dunque

$$\begin{aligned} OQ^2 &= k^2 + (k^2 - r^2) \tan^2 \theta = k^2 + \frac{k^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{\cos^2 \theta} \\ &= \frac{k^2}{\cos^2 \theta} - \frac{r^2}{\cos^2 \theta} + r^2 = r^2 + (k^2 - r^2) \sec^2 \theta, \end{aligned}$$

che è uguale ad r'^2 come si è trovato di sopra.

184. Altra applicazione. Sia ancora da trovarsi la condizione d'equilibrio quando l'intradosso, ed estradosso siano due rette, e l'arco sia una così detta *piattabanda*. La superficie o peso di $PQQ'P' = \frac{1}{2} DE (PP' + QQ')$. Ma dai triangoli simili $OQQ' OPP'$ abbiamo



$$QQ' = PP' \frac{OQ}{OP}; \text{ dunque avremo peso}$$

$$PQQ'P' = \frac{1}{2} DE (PP' + PP' \frac{OQ}{OP})$$

$$= \frac{1}{2} DE \cdot PP' (1 + \frac{OQ}{OP}),$$

questo deve essere uguale ad

$$m(\tan \angle DOP' - \tan \angle DOP)$$

(§. 175.), ove m è la pressione orizzontale costante. Ma

$$\text{tang. } \angle DOP' = \frac{DP'}{DO'}, \quad \text{tang. } \angle DOP = \frac{DP}{DO} :$$

dunque avremo

$$\angle DE.PP' \left(1 + \frac{OQ}{OP}\right) = m \left(\frac{DP' - DP}{DO}\right) = m. \frac{PP'}{DO}$$

ossia

$$\angle DE \left(1 + \frac{OQ}{OP}\right) = \frac{m}{DO}$$

ma

$$\frac{OQ}{OP} = \frac{OE}{DO}$$

dunque

$$\angle DE \left(1 + \frac{OE + DE}{DO}\right) = \frac{1}{2} DE \left(2 + \frac{DE}{DO}\right) = \frac{m}{DO}$$

in questa equazione m , DE , sono quantità costanti: dunque deve essere costante anche DO , perciò la condizione dell'equilibrio della piattabanda è, che le direzioni dei letti con corrano nella stesso punto O sul prolungamento della chiave.

185. La seconda condizione dell'equilibrio degli archi è, che la risultante della spinta alla chiave, o del peso di una porzione qualunque di arco cominciando da questa cada dentro il limite del letto del detto arco; perchè se cadesse fuori farebbe strisciare l'arco lungo il letto verso l'interno, o l'esterno dell'arco verso cui tendesse la detta risultante.

186. Per vedere geometricamente espressa questa condizione (fig. pag. 189) dagli estremi E , D della chiave si conducan due rette orizzontali Ee , Dd , o dagli estremi P , Q del letto PQ s'intendano ad esso condotte le due normali Pn , Qe , è evidente che queste quattro normali formeranno collo loro intersezioni un parallelogrammo $denm$; ora dentro questo dovrà passare la direzione del peso della porzione dell'arco $DEQP$: perchè qualunque normale condotta alla chiave concorrendo colla detta direzione del peso in un

punto dentro il detto parallelogrammo, in questa concorrerà la spinta alla chiave, e qualora della spinta alla chiave e del peso dell'arco si trovi la risultante, e questa sia normale al letto cadrà dentro i suoi limiti, perchè è tra le normali alle sue estremità.

187. Applicazione alla piattabanda. Questa condizione ha una applicazione alla piattabanda. Se in questa si tratta di tutta la mezza volta piana si vede, che la verticale del peso riunito nel centro di gravità deve passare pel triangolo RKS, che si ha elevando sull'estremo R del pulvinare RS la normale RK, perchè l'altra normale all'estremo S sfugge dall'intersecarsi colle normali ES, DR condotte all'estremità della chiave. Ora è evidente, che i letti P'Q', PQ facendo coll'orizzontale DR angoli sempre maggiori, le normali elevate agli estremi P', P. dei detti letti s'inclineranno di più in più alla detta orizzontale DR, onde se RK ha tale inclinazione da ricevere a dritta di essa il centro di gravità della mezza piattabanda, a più forte ragione i centri di gravità delle parti P'Q'ED, PQED della piattabanda, saranno a dritta delle normali elevate dalle estremità inferiori dei letti P'Q', PQ. Se dunque stabiliremo, che la distanza del centro di gravità della mezza piattabanda dalla chiave è maggiore di EK, questa sarà la condizione equivalente alla seconda (§. 186.) da noi stabilita: dicendo dunque X la distanza del centro di gravità della mezza piattabanda da DE, si deve dare in valore l'inuguaglianza $X > EK$. Troviamo X. Si divida il trapezio DESR nel rettangolo DO, e nel triangolo ROS: si dica c la chiave ED, sia $RD = a$, e sia lo sporto OS del pulvinare uguale ad x . La distanza del centro di gravità del rettangolo da DE è $\frac{a}{2}$. La distanza del centro di gravità del triangolo da RO è $\frac{x}{3}$. Prendendo DE per asse dei momenti, avremo, che il momento

dell'area o peso del trapezio DESR rispetto DE cioè

$$X(2a+x) \frac{c}{2}$$

deve essere uguale al momento del rettangolo DEO'R, cioè
 $ac \cdot \frac{a}{2}$ più il momento del triangolo cioè

$$\frac{xc}{2} \left(a + \frac{x}{3} \right)$$

dunque

$$X(2a+x) \frac{c}{2} = \frac{a^2c}{2} + \frac{c}{2} \left(ax + \frac{x^2}{3} \right),$$

ossia

$$\begin{aligned} X(2a+x) &= a^2 + ax + \frac{x^2}{3} \\ &= \frac{2a^2 + 2ax}{2} + \frac{x^2}{3} = \frac{2a^2 + ax}{2} + \frac{ax}{2} + \frac{x^2}{3} \\ &= \frac{a}{2} (2a+x) + \frac{1}{6} (3ax + 2x^2) \end{aligned}$$

ed

$$X = \frac{a}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3ax + 2x^2}{2a+x}.$$

Nel triangolo KRS rettangolo in R abbiamo

$$KO = \frac{RO^2}{OS} = \frac{c^2}{x}$$

dunque

$$EK = EO - KO = a - \frac{c^2}{x} = \frac{ax - c^2}{x};$$

dunque l'inuguaglianza domandata sarà

$$\frac{a}{2} + \frac{1}{6} \cdot \frac{3ax + 2x^2}{2a+x} > \frac{ax - c^2}{x}.$$

Riducendo allo stesso denominatore, e togliendo le quan-

tità comuni ad ambedue i membri avremo

$$x^3 - 3a^2x + 6ac^2 + 3c^3x > 0$$

ossia

$$(1) \quad x^3 + 3c^2x + 6ac^2 < 3a^2x.$$

Si riduca questa ad equazione cambiando il $>$ in $=$, ed in questa avremo tre quantità cioè x , a , c , delle quali date due si potrà trovare la terza.

Si supponga una piattabanda costruita sopra un triangolo equilatero, cosicchè il pulvinare declini dalla verticale con angolo di 30° , e si domandi a quanto potrà estendersi la sua mezza tratta DR. Dicasi la chiave $c=1$, ed essendo l'angolo ORS $= 30^\circ$, se col raggio OR $= 1$ e col centro R si descriva un arco di circolo sarà

$$OS = x = \text{tang. } 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Nell'equazione

$$(2) \quad x^3 + 3c^2x + 6ac^2 = 3a^2x$$

si ponga

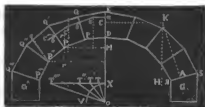
$$x = \frac{1}{\sqrt{3}}, c=1$$

vi rimarrà l'incognita a , per la quale si risolverà un'equazione di secondo grado.

188. Nel trovare la a in questa equazione si deve osservare l'ineguaglianza (1) (§. 187.). Confrontando l'ineguaglianza (1) coll'equazione (2) si vede, che il valore di a ricavato da questa deve prendersi alquanto minore. Ora questa equazione ci dà $a = 3.75...$; dunque potrà essere $a = 3.75$, e $2a = 7.5$: dunque la tratta doppia di DR potrà essere al più sette volte e mezzo la chiave.

189. Confronto fra l'equilibrio dell'arco e quello del poligono funicolare rigido. Prima di passare a considerare in generale l'equilibrio degli archi facciamo

qualche interessante riflessione. La prima è che l'equilibrio dell'arco si riduce all'equilibrio di una travatura come l'abbiamo considerata nel (Cap. VII), e perciò si riduce al poligono funicolare (Cap. V).



Infatti considerando in $c, c', c'',$ ec. i centri di gravità dei diversi cunei, da c si conducano due normali ca, cb alla chiave DE , ed al letto PQ . Da b si prolunghi la normale $c'b$ finchè incontri la verticale condotta per c' , o la direzione del peso del cuneo $P'Q$, che passa pel centro c' di gravità. Dalla detta intersezione si cali una normale sul letto $P'Q$; si prolunghi questa al di là sino all'incontro colla direzione del peso che passa per c'' , e così fino al pulvinare. Con questo avremo un poligono $acc'e''...$, fino al pulvinare, ed ai vertici c, c', c'' ec. degli angoli del poligono applicati i pesi dei diversi cunei. Se si voglia la condizione dell'equilibrio di questo poligono bisogna ricorrere al (§. 146). In questo si è dimostrato, che il peso al vertice di un angolo qualunque del poligono diviso per la differenza delle cotangenti degli angoli che i lati a destra, e a sinistra fanno col detto peso è una quantità costante. Si dica dunque c' il peso del cuneo $P'Q$, dovrà essere costante questo peso c' diviso per la differenza delle cotangenti degli angoli fatti da $c'b, c'b'$ colla verticale. Questa verticale si supponga condotta per c' , e si vedrà chiaro, che i detti angoli sono complementi di quelli che fanno colla verticale i letti $P'Q', PQ$: dunque potremo dire, che il peso c' è proporzionale alla differenza delle tan-

genti degli angoli che fanno colla verticale i detti letti $P'Q'$, PQ . Ed appunto abbiamo veduto (§ 175), che il peso del cuneo $PQ'P'$ era proporzionale a TT' differenza delle tangenti XT , XT' degli angoli TOX , $T'OX$, che i letti PQ , $P'Q'$ fanno colla verticale OX .

190. Si è veduto, che l'azione orizzontale sui letti dei cunei è costante (§. 177), ed è uguale all'azione contro la chiave; che il peso di una porzione di arco cominciando dalla chiave è proporzionale alla tangente dell'angolo che fa colla verticale il letto, su cui imposta l'arco, e che precisamente è uguale alla detta tangente moltiplicata per la spinta orizzontale alla chiave, cioè combiua coi (§. 120, 122).

191. **Formola generale dell'equilibrio degli archi.** Si supponga l'arco come in figura, (pag. 182) e si fissi un cuneo infinitesimo $P'P''Q''Q'$. Si prenda la retta DO prolungamento della chiave per asse della ascisse, e sia pel punto P' , $DM = x$, $MP' = y$, l'arco $DPP' = s$. Sarà

$$P'P'' = ds, P'r = dx, rP'' = dy.$$

Si dica θ l'angolo d'inclinazione $Q'P'r'$ del letto $P'Q'$ alla verticale, e z il detto letto, o la grossezza del cuneo. Calcoliamo il peso o l'area del cuneo $P'P''Q''Q'$: per ciò si conduca $P''q$ parallela a $P'Q'$: la figura $P''P'Q'q$ si può considerare come un parallelogrammo. L'area di questa figura è il prodotto di due lati contigui nel seno dell'angolo fatto da essi: dunque l'area

$$P'P''qQ' = P'P'' \cdot P'Q' \sin.Q'P'P'' = zds \sin.Q'P'P''.$$

Si ha

$$P'P'' = ds, P'Q' = z,$$

$$\sin.Q'P'P'' = \sin.(Q'P'r' + P''P'r) = \sin.(\theta + P''P'r)$$

$$= \sin.\theta \cos.P''P'r + \cos.\theta \sin.P''P'r$$

$$= \frac{dx}{ds} \sin.\theta + \frac{dy}{ds} \cos.\theta :$$

dunque l'area

$$P'P''Q'Q = z(dx \sin \theta + dy \cos \theta).$$

L'area $P''Q''q$ si può considerare come quella di un settore circolare di raggio $P''q = z$, e di angolo $Q''P''q = d\theta$, arco di raggio uno: dunque questo settore uguaglia $\frac{1}{2} z^2 d\theta$: quindi l'area, o peso del cuneo $P''P'Q'Q''$ è rappresentato da

$$\frac{1}{2} z^2 d\theta + z(dx \sin \theta + dy \cos \theta):$$

questo è uguale ad una costante moltiplicata per il differenziale della tangente di θ (§. 178.) dunque

$$(a) \quad \frac{1}{2} z^2 d\theta + z(dx \sin \theta + dy \cos \theta) = A d \tan \theta = \frac{A d\theta}{\cos^2 \theta}.$$

192. Analisi dell'equazione. Si vede che in questa equazione abbiamo l'intradosso nelle coordinate x, y ; abbiamo ancora l'estradosso, perchè abbiamo la grossezza z dei cunei e le loro direzioni per mezzo delle loro inclinazioni θ alla verticale, e con questo abbiamo eziandio le dimensioni, e le configurazioni dei cunei, abbiamo dunque tutti gli elementi degli archi in equilibrio.

193. Tagli dei cunei normali all'intradosso. Natura di questo. Supponiamo i tagli dei cunei normali all'intradosso, che è il caso il più frequente in pratica. In questo l'angolo $Q'P'r'$ è complemento di $P''P'r$, essendo l'angolo $Q'P'P''$ retto: dunque $\theta = P'P'r$, e quindi $\tan \theta = \frac{dx}{dy}$. Ora abbiamo, che essendo Π il peso dell'arco $P'Q'ED$, sia ha $\Pi = A \tan \theta$ (§. 178), dunque

$$\Pi = \frac{A dx}{dy}, \text{ e } \Pi dy = A dx$$

equazione (§. 128.) differenziale della catenaria, dunque l'intradosso è questa curva.

194. Se si prolungano nell'interno dell'intradosso i due letti $Q'P'$, $Q''P''$ normali agli estremi dell'archetto $P'P'' = ds$, nell'incontro daranno il raggio R osculatore all'intradosso in P' ; ora l'angolo $Q''P''q$ è $d\theta$: ma essendo $P''q$ parallela a $P'Q'$, il detto angolo $d\theta$ sarà l'angolo che il $Q''P''$ o il raggio R in P'' fa col raggio R in P' : dunque $Rd\theta$, è l'arco di circolo di raggio R compreso fra i due detti raggi del circolo osculatore: ma questo arco essendo l'arco di circolo osculatore, che combacia con ds : sarà

$$Rd\theta = ds, \text{ o } R = \frac{ds}{d\theta},$$

ove il θ è l'angolo che il raggio osculatore fa colla verticale, o coll'asse delle x .

195. **Raggio osculatore dato in coordinate.** Togliamo di qui occasione di dare il raggio osculatore in coordinate, che ci servirà molto in appresso. Abbiamo

$$\text{tang. } \theta = \frac{dx}{dy} :$$

dunque

$$\frac{d\theta}{\cos.^2\theta} = d, \frac{dx}{dy}$$

ma

$$\cos.\theta = \frac{dy}{ds}$$

dunque

$$d\theta = \frac{dy^3}{ds^3} d. \frac{dx}{dy} :$$

ma

$$R = \frac{ds}{d\theta} :$$

dunque

$$R = \frac{ds^2}{dy^2 d. \frac{dx}{dy}} = \frac{(dx^2 + dy^2)^{\frac{1}{2}}}{dy^2 d. \frac{dx}{dy}} \\ = \frac{(1 + \frac{dx^2}{dy^2})^{\frac{1}{2}} dy}{d. \frac{dx}{dy}}$$

ove prima della differenziazione si sceglierà la variabile principale.

196. Equazione generale modificata pel caso dei tagli normali. Ritornando all'equazione (a) (§. 191): essendo (§. 193) $\theta = P'P''r$ avremo

$$dx \text{sen.} \theta = \frac{dx^2}{ds}, \text{ e } dy \text{cos.} \theta = \frac{dy^2}{ds}.$$

Dunque in quella equazione avremo

$$z(dx \text{sen.} \theta + dy \text{cos.} \theta) = z \left(\frac{dx^2 + dy^2}{ds} \right) = z ds :$$

onde la detta equazione diventerà

$$\frac{1}{2} z^2 d\theta + z ds = \frac{\Lambda d\theta}{\cos.^2 \theta},$$

e dividendo per $d\theta$ e ponendo R invece di $\frac{ds}{d\theta}$ (§. 196.) sarà

$$(b) \quad z^2 + 2Rz = \frac{2\Lambda}{\cos.^2 \theta}.$$

197. L'equazione (b) avuta per l'equilibrio degli archi quando i tagli dei cunei sono normali all'intradosso si può aver subito, e con facilità. Infatti si consideri il cuneo infinitesimo $PP'Q'Q$ (fig. p. 175). Se i due tagli PQ , $P'Q'$ si prolunghino fino all'incontro in O, nel nostro caso daranno il raggio osculatore PO, o R dell'intradosso in P. Ritenendo, che θ esprima l'angolo POE che il taglio $PQ = z$ fa colla verticale, sarà $Rd\theta$ l'arco PP' , e quindi $\frac{1}{2} R^2 d\theta$ sarà l'area del

settore POP'. Se col raggio $OQ = R + z$ si descriva l'archetto infinitesimo Qq , l'area del settore OQq sarà

$$\frac{1}{2}(R + z)^2 d\vartheta :$$

poichè l'elemento QqQ' ha ambedue le sue dimensioni infinitesime è trascurabile rispetto il settore OQq , perchè è un infinitesimo di secondo ordine rispetto uno di prim'ordine; onde si può dire, che il valore $\frac{1}{2}(R + z)^2 d\vartheta$ di QOq lo è di QOQ' : dunque l'area, o il peso del cuneo infinitesimo $PP'Q'Q$ sarà

$$\frac{1}{2}(R + z)^2 d\vartheta - \frac{1}{2} R^2 d\vartheta :$$

questo deve essere uguale (§. 193.) ad

$$Ad \operatorname{tang} \vartheta = \frac{A d\vartheta}{\cos.^2 \vartheta} :$$

dunque

$$(1) \quad z^2 + 2Rz = \frac{2A}{\cos.^2 \vartheta} .$$

Se si risolva l'equazione (1) avremo

$$(2) \quad z = -R + \sqrt{\left(R^2 + \frac{2A}{\cos.^2 \vartheta}\right)} ,$$

dalla quale potremo ricavare le grossezze z dei cunei quando si conosca la curva interna. Si deve però trovare primieramente la A . Ma ciò è facile, perchè si porterà l'equazione alla chiave, questa suol essere cognita, quindi si avrà la z ; sarà cognito in questo punto il raggio osculatore dell'intradosso, in ultimo la ϑ sarà 0, dunque si conoscerà A .

198. La formola poi per conoscere le inclinazioni dei letti dei cunei alla verticale sarà

$$\operatorname{tang} \vartheta = \frac{dx}{dy} ,$$

ove il secondo membro è cognito essendo cognito l'intradosso.

199. **Applicazione.** Sia per esempio l'intradosso circolare e sia m la grossezza della chiave: facendo in (2) $x=m$ dovrà essere $\cos.\theta = 1$ onde

$$m = -R + \sqrt{R^2 + 2A}$$

ed

$$(m + R)^2 = R^2 + 2A,$$

quindi $2A = m^2 + 2Rm$: dunque per la scala delle grossezze dei cunei nell'arco d'intradosso circolare avremo l'equazione

$$x = -R + \sqrt{R^2 + \frac{2Rm + m^2}{\cos.^2\theta}}.$$

Se si volesse la grossezza del cuneo dopo un arco di 45° dalla chiave sarebbe

$$\cos.^2\theta = \cos.^2 45^\circ = \frac{1}{2}$$

onde

$$x = -R + \sqrt{R^2 + 4Rm + 2m^2}.$$

Se R supera notabilmente la grossezza m della chiave poco monta che sotto il vincolo si aggiunga un $2m^2$, in questo caso avremo

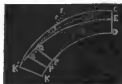
$$x = -R + \sqrt{R^2 + 4Rm + 4m^2} = 2m,$$

quindi nel detto luogo la grossezza del cuneo è poco meno che il doppio della chiave.

200. **Caso in cui da se si verifica la seconda condizione dell'equilibrio degli archi.** Una riflessione interessante, è che se si tratta di un arco, in cui i tagli dei cunei siano normali all'intradosso, è già da se verificata la seconda condizione per l'equilibrio degli archi; che cioè la verticale del peso di una porzione qualunque dell'arco cominciando dalla chiave riconcentrato nel suo centro di gravità tagli il parallelogrammo fatto dalle intersezioni delle

normali condotte agli estremi della chiave, ed agli estremi del letto, su cui imposta l'arco (§. 186).

201. Infatti quando i tagli dei cunei sono normali alla

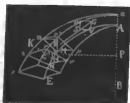


curva interna questa è una catenaria (§. 193). Ora se il peso di ciaschedun cuneo fosse tutto raccolto nel corrispondente latercolo PP' , la verticale condotta pel centro di gravità dell'arco $DEPQ$ pas-

serebbe pel punto m (§. 117) intersezione delle tangenti estreme Dm , Pm . Ora per Q si conduca la curva QC perpendicolare ai tagli prolungati dei cunei, e questa incontri in C il taglio verticale DE , sarà essa pure una catenaria, e se il peso d'ogni cuneo fosse raccolto nel corrispondente latercolo di questa curva QC , la verticale condotta pel centro di gravità dell'arco QC passerebbe pel punto q intersezione delle tangenti estreme Cq , Qq . Ora essendo in realtà il peso dell'arco distribuito fra le due curve PD , QC , la verticale del suo centro di gravità passerà fra q , m . E qui facilmente si scorge, che essendo $DC = PQ$, il parallelogrammo qm sarà un rombo avente gli angoli ottusi in m , e q ; e però essendo quella verticale fra i punti q , m non potrà non attraversare il parallelogrammo em .

Equilibrio delle cupole

202. Rappresenti la figura qui innanzi l'unghia solida di



soltanto dalla sua uguale ed opposta, fosse in equilibrio, si richiederebbe, che rappresentato con GO la spinta alla chiave, e con GV il peso della porzione Am dell'unghia, la risultante GS di queste due forze si elidesse sul letto μm , ossia dovrebbe essere normale a questo, e cadere in uno dei suoi punti. Ma ricercandosi l'equilibrio non già dell'unghia solitaria, ma bensì dell'intera cupola, potrà quella risultante declinare dalla direzione normale piegando verso l'asse, o verso l'interno della cupola, mai verso la parte opposta. Poichè se quella risultante declina piegando verso l'asse l'unghia MA $\alpha m'$ tenderà a sdrucciolare in giù da m verso M; ma essendo la stessa tendenza in tutte le altre unghie, che le stanno attorno per tutto il giro della cupola, ed esercitandosi questa tendenza da tutte nello stesso tempo, e con egual forza, ben si vede, che tali sforzi s'impediscono, e si elidono l'un l'altro, ne ponno aver l'effetto, per cui la curva si dissolva. Per lo contrario, se la risultante piega all'infuori, l'unghia tenderà a strisciare da M verso m schizzando fuori della cupola, al quale sforzo nulla si oppone. Ricaviamo da ciò la

203. Condizione fondamentale dell' equilibrio delle cupole. Nel caso, che la risultante GS sia normale al letto μm , condotta la MR verticale, e la orizzontale Rm, avendo il triangolo GVS i lati rispettivamente normali ai lati del triangolo MRm, si avrà l'uguaglianza

$$\frac{GV}{GO} = \frac{mR}{MR}.$$

Ma se GS inclini verso la verticale GV si farà SV, o GO minore; e perciò la detta condizione diverrà

$$\frac{GV}{GO} > \frac{mR}{MR}.$$

Si dica Π il peso della parte Aamp dell'unghia, A la spinta alla chiave, e θ l'inclinazione di mM alla verticale, l'inuguaglianza antecedente diverrà

$$\frac{\Pi}{A} > \frac{\text{sen.}\theta}{\text{cos.}\theta} \text{ ossia } \Pi > A \text{ tang.}\theta.$$

Qui poichè la quantità Π , e $\text{tang.}\theta$ partono entrambi dallo zero, e crescono continuamente verso il pulvinare, è forza che la prima cresca in ragione maggiore della seconda: onde la detta inuguaglianza avrà luogo anche per li differenziali

e perciò
$$d\Pi > \frac{A d\theta}{\text{cos.}^2\theta}.$$

204. Qui ancora, come negli archi, la cupola non può basare sopra pulvinare orizzontale, perchè l'inuguaglianza $\Pi > A \text{ tang.}\theta$ diventa assurda.

205. Si calcoli il peso del cuneo elementare della cupola. Sia z la grossezza della cupola nel punto M, cui corrisponde l'ascissa x : quello che si deve calcolare è il cuneo Mv' rappresentato nel caso nostro da $d\Pi$. Si avrà questo solido moltiplicando l'area del quadrilatero Mn per la linea descritta dal suo centro di gravità G quando il detto

quadrilatero percorre l'arco di circolo Nv. Questo centro di gravità si trova sulla retta KH che biseca i lati opposti MN, mn: ma essendo $MN=ds$, $mn=ds+x d\theta$ (§. 193). Questo quadrilatero si può considerare come un trapezio di lati paralleli MN, mn quindi applicando la formola (din. §. 47), ed essendo KH = x avremo

$$HG = \frac{1}{3} x \cdot \frac{3ds + 2xd\theta}{2ds + xd\theta}.$$

Inoltre avremo $Go = HG \sin \theta$, ed il raggio dell'arco, che descrive il centro di gravità quando il quadrilatero Mn si muove secondo Nv sarà

$$y + Go = y + HG \sin \theta.$$

Supponendo uno l'arco di raggio uno dello stesso numero di gradi di Nn, il detto raggio esprimerà il viaggio del centro di gravità G nel muoversi di Mn, che sarà

$$y + \frac{1}{3} x \cdot \frac{3ds + 2xd\theta}{2ds + xd\theta} \sin \theta$$

se questo si moltiplica per l'area Nm generatrice del cono μn , che abbiamo calcolato nel (§. 293) sarà il detto cono

$$d\Pi = [1x^2 d\theta + 2(dx \sin \theta + dy \cos \theta)] \left(y + \frac{1}{3} x \sin \theta \frac{3ds + 2xd\theta}{2ds + xd\theta} \right)$$

che in ogni punto non potrà mai essere minore di $\frac{Ad\theta}{\cos^2 \theta}$.

205. Caso dei letti normali alla superficie interna. Questo caso è così frequente in pratica, che può aversi per universale. In questo caso (§. 198.)

$$\sin \theta = \frac{dx}{ds}, \quad \cos \theta = \frac{dy}{ds}, \quad \tan \theta = \frac{dx}{dy}$$

ed il raggio osculatore (§. 194) $R = \frac{ds}{d\vartheta}$, e l'equazione (1) diventa

$$d\Pi = (1z^2 + Rz) \left(y + \frac{1}{3} z \operatorname{sen} \vartheta \cdot \frac{3R + 2z}{2R + z} \right) d\vartheta$$

Se la grossezza z sarà da per tutto assai piccola in confronto di R trascureremo $\frac{1}{3}z^2$ in confronto di Rz , e $2z$, z rispetto $3R$, $2R$, dunque avremo

$$d\Pi = R(zy + \frac{1}{3}z^2 \operatorname{sen} \vartheta) d\vartheta,$$

ossia ponendo $\frac{ds}{R}$ invece di $d\vartheta$, sarà (2)

$$d\Pi = zyds + \frac{1}{3}z^2 ds \operatorname{sen} \vartheta$$

ma $ds \operatorname{sen} \vartheta = dx$: dunque avremo finalmente

$$(2) \quad d\Pi = zyds + \frac{1}{3}z^2 dx$$

La cupola suol spiccarsi dal culmine con poca curvatura, quindi dx è molto piccolo in confronto di ds , perciò nella (2) si potrà trascurare il secondo termine $\frac{1}{3}z^2 dx$ in paragone di $zyds$. Quando l'ascissa x sarà alquanto cresciuta la y comincerà ad essere molto grande in confronto di z : anche in questo caso si potrà neglegere il termine già detto; dunque potrà ritenersi, che l'equilibrio della cupola sarà espresso dalla inuguaglianza (§. 203)

$$fzyds > A \operatorname{tang} \vartheta,$$

ossia da (§. 205)

$$fzyds > A \frac{dx}{dy}.$$

Prendendo i logaritmi neperiani e poi differenziando avremo

$$(3) \quad \frac{zyds}{fzyds} > \frac{dy}{dx} d. \frac{dx}{dy}.$$

Questa inuguaglianza serve a due specie di problemi. Il primo è: data la curva generatrice della superficie interna

della cupola trovar la scala delle grossezze z dei cunei, onde si abbia l'equilibrio. L'altro problema è: data la detta scala, e la curva generatrice interna, vedere se possa aver luogo l'equilibrio. A questo si soddisfa osservando, se in questo caso sussista la (3).

206. **Si ricava l'equazione per la prima specie di problemi.** L'inuguaglianza (3) può rappresentarsi coll'equazione

$$\frac{yzds}{\int yzds} = p \frac{dy}{dx} d. \frac{dx}{dy},$$

dove p è positivo, e maggiore dell'unità. Questa equazione integrata ci dà

$$L \int yzds = pL \frac{dx}{dy} + pLA,$$

ove pLA è la costante arbitraria. Passando in questa dai logaritmi ai numeri avremo

$$\int yzds = A \left(\frac{dx}{dy} \right)^p.$$

Differenziando ed isolando la z avremo

$$(a) \quad z = \frac{Ap}{yds} \left(\frac{dx}{dy} \right)^{p-1} d. \frac{dx}{dy}.$$

207. **Applicazione.** Sia una cupola sferica di raggio r . L'equazione del circolo generatore sarà $y^2 = 2rx - x^2$. Si troverà facilmente

$$yds = rdx; \quad \frac{dx}{dy} = \frac{y}{r-x} = \frac{\sqrt{(2rx-x^2)}}{r-x}.$$

Sostituendo questi valori in (a) troveremo

$$z = \frac{pAr(2rx-x^2)^{p-1}}{(r-x)^{p+1}}.$$

In questa espressione il p può essere qualunque numero positivo maggiore dell'unità (§. 206). Se m sia la grossezza della chiave, nell'equazione antecedente fatto $x = 0$ deve

aversi $z = m$: dunque dovrà essere

$$m = \frac{pAr(0)^{p-1}}{r^{p+1}}.$$

Affinchè da questa equazione non risulti $m = 0$ deve sparisce $(0)^{p-1}$ ossia $(2rx - x^2)^{p-1}$; dunque deve essere

$$1p - 1 = 0, \text{ o } p = 2:$$

dopo ciò abbiamo $m = 2 \frac{A}{r^3}$, e quindi $A = 1mr^2$: dunque

per la scala delle grossezze avremo la formola $z = \frac{mr^3}{(r-x)^3}$.

208. Data la curvagenetrice della cupola, e data la scala delle grossezze si trova la condizione algebrica per l'equilibrio. In questo caso essendo data la z , e la y in funzioni di x deve verificarsi la condizione (§. 205)

$$\frac{yzds}{fyzds} > \frac{dy}{dx} d. \frac{dx}{dy}.$$

Sia qui ancora una cupola sferica; si vuol sapere se potrà sostenersi dandole una grossezza costante m . Essendo z costante l'inuguaglianza superiore diventerà

$$\frac{yds}{fyzds} > \frac{dy}{dx} d. \frac{dx}{dy}.$$

Nel caso della cupola sferica

$$yds = rdx, \quad \frac{dy}{dx} = \frac{r-x}{\sqrt{(2rx-x^2)}}.$$

Fatte le sostituzioni troveremo

$$\frac{dx}{x} > \frac{r^2 dx}{(r-x)(2rx-x^2)},$$

ossia (a) $(r-x)(2r-x) > r^2$.

Se si tolga il segno d'inuguaglianza, e si risolva l'equazione proveniente

$$x^2 - 3rx = -r^2, \text{ avremo } x = r \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}.$$

Se si sostituiscano questi due valori in (a) si vedrà, che il solo valore $x = r \frac{3 - \sqrt{5}}{2} = a^2$ (ove a è una qualunque piccolissima quantità) soddisfa alla (a), e che per conseguenza deve essere

$$x < r \frac{3 - \sqrt{5}}{2}, \text{ ossia } x = 0.382r,$$

che è la saetta dell' arco generatore, che può equilibrare la cupola. Il coseno di quest'arco sarà

$$x = r - 0.382r = 0.618r,$$

è l'arco si troverà di $51^\circ, 49', 50''$.

CAP. XI.

Dell'equilibrio delle volte avendo riguardo all'attrito.

209. Gli archi, e le cupole formate secondo le regole prescritte nei capi precedenti traggono la loro stabilità dal contrasto, che si fanno fra loro i cunei, che le compongono, mentre tendendo tutti a discendere pel proprio peso s'impediscono, e si sorreggono a vicenda. Quindi reggerebbe immota la fabbrica quando anche i cunei non fossero da alcun cemento legati, e quando anche le loro facce fossero levigate e spianate, che potessero sdruciolare liberamente senza sentire il minimo ostacolo dell'attrito.

210. Che se cominceremo a considerare le resistenze, che la natura o l'arte può opporre allo scorrimento de' cunei, troveremo potersi dare agli archi ed alle cupole figure diverso da quelle che furono prescritte, e tuttavia assai ferme e stabili, perchè la mancanza dell'equilibrio fra i pesi dei cunei sarà ristorata dal contrasto delle resistenze.

Per ora piglieremo ad esaminare l'effetto dell'attrito, e vedremo sino a qual segno si possa alterare in grazia di questa resistenza la figura d'equilibrio, che avevamo assegnate per gli archi.

211. Limiti dentro i quali deve trovarsi il peso di un arco nel caso dell'attrito. Si consideri l'arco $DEQ'P'$ (fig. p. 171), il peso di questa porzione sia Π , e la spinta alla chiave sia A . Questo arco appoggiandosi al letto $P'Q'$ è come un corpo sopra un piano $P'Q'$ inclinato alla verticale dell'angolo θ , e animato da un peso Π , e da una forza orizzontale A : dunque avremo il caso del (§. 81); perciò la forza, colla quale quest'arco tende a strisciare da Q' verso P' sarà $\Pi \cos. \theta - A \sin. \theta$, ed in conseguenza la forza colla quale tenderà a strisciare in senso contrario da P' verso Q' sarà $A \sin. \theta - \Pi \cos. \theta$. Ad ambedue questi moti si opporrà l'attrito colla forza $f \Pi \sin. \theta + f A \cos. \theta$: dunque per l'equilibrio dovrà essere

$$\pm \Pi \cos. \theta \mp A \sin. \theta = f \Pi \sin. \theta + f A \cos. \theta;$$

risolta questa equazione per Π troveremo

$$(1) \quad \Pi = A. \frac{\tan. \theta \pm f}{1 \mp f \tan. \theta}$$

ossia

$$(2) \quad \Pi = A. \frac{1 \pm f \cot. \theta}{\cot. \theta \mp f}.$$

Coll'attrito i letti dei cunei possono essere anche orizzontali, perchè in questo caso $\cot. \theta = \cot. 90^\circ = 0$, e la formola

(2) ci dà $\Pi = \frac{A}{\mp f}$, e non Π assurdo come nel (§. 179).

212. Così ancora non è necessario, che la risultante di Π ed A sia normale al letto, come viene dall'equazione fondamentale dell'equilibrio degli archi (§. 178) cioè, $\Pi = m. \tan. \theta$. Infatti (fig. pag. 190) se GO esprima la spinta m alla chiave, GV il peso Π dell'arco $AamM$, e GS sia

la loro risultante normale al letto Mm . Condotta la verticale MR , e l'orizzontale mR il triangolo GOS avrà i lati normali al triangolo MRm , e quindi avremo la proporzione $\Pi: m = mR: MR = \text{sen}.mMR: \cos.mMR = \text{sen}.\theta: \cos.\theta$, e quindi $\Pi = m.\text{tang}.\theta$. Nel caso dell'attrito basta, che la cotangente dell'angolo n , che la detta risultante GS fa col detto letto sia fra i limiti $\pm f$. Infatti decomponendo la detta risultante R in due forze l'una secondo il letto, l'altra ad esso normale, sarà la prima $R\cos.n$, e l'altra $R\text{sen}.n$, e perciò l'attrito sarà $fR\text{sen}.n$. Ora la componente $R\cos.n$ potrà avere la direzione verso il basso, o verso l'alto del piano inclinato: dunque potrà essere espressa da $\pm R\cos.n$: in ambedue questi casi deve equilibrarsi coll'attrito $fR\text{sen}.n$: dunque $\pm R\cos.n = fR\text{sen}.n$: cioè $\cot.n = \pm f$. Differenziando la (1) (§. 211) avremo

$$d\Pi = \frac{Ad\theta}{\cos.^2\theta} \cdot \frac{1-f^2}{(1 \mp \text{tang}.\theta)^2},$$

e questo valore dovremo porre nell'equazione (§. 191) fra z , e θ ; e così avremo i limiti, dentro i quali possono variare le grossezze dell'arco salvo l'equilibrio.

213. Così nell'esempio del (§. 199) per l'arco circolare avremo

$$z = -R + \sqrt{\left(R^2 + \frac{2Rm + m^2}{\cos.^2\theta(1 \mp \text{tang}.\theta)^2}\right)}.$$

Se m è piccolissima rispetto R , sotto il radicale si potrà porre

$$\frac{m^2}{\cos.^4\theta(1 \mp \text{tang}.\theta)^4}, \text{ invece di } \frac{m^2}{\cos.^2\theta(1 \mp \text{tang}.\theta)^2},$$

e fatto ciò estraendo la radice avremo

$$z = \frac{m}{\cos.^2\theta(1 \mp \text{tang}.\theta)^2};$$

formola, colla quale si può calcolare a ciascun punto dell'arco la conveniente grossezza. Col segno superiore avremo la grossezza massima, e col segno inferiore la minima, che

possa darsi all'arco. Sarà facile formarne delle tavole, ed anche delineare per punti le due curve, l'una delle maggiori, l'altra delle minori grossezze: ed allora qualunque sia la curva esterna dell'arco, purchè non esca fuori dei limiti delle due curve suddette, l'arco sarà sicuramente riguardo a questa prima condizione d'equilibrio.

214. Nella scala delle minori grossezze s'incontra un valor minimo dove $\tan \theta = f$, che da $x = \frac{m}{1+f^2}$. Nelle massime vicinanze del punto, ove $\cot \theta = f$, abbiamo x maggiore d'ogni assegnabile. Al punto ove $\theta = 90^\circ$, cioè nell'imposta orizzontale, entrambe le curve concorrono nello stesso valore di $x = \frac{m}{f^2}$. Così posto $f = 0.75$, il più che possa l'arco assottigliarsi nei fianchi sarà a distanza di quasi 37° dal vertice, ove viene $x = 0.64m$, onde quivi può ridursi ai due terzi della sua grossezza alla chiave, ed il più che possa ingrossarsi sarà verso i 53 gradi, ove la sua grossezza può crescere indefinitamente. Affinchè l'arco DEPQ non faccia mossa girando attorno i punti Q, P sussiste la condizione (§. 186). Se non che potendo la risultante del peso dell'arco, e della spinta alla chiave cadere sulla PQ con qualunque obliquità compresa nei limiti della formola (212) $\cot n = \pm f$, le rette Pm, Qi (fig. pag. 189) dovranno inclinarsi alla PQ con angolo ottuso, che abbia per cotangente $-f$. E basterà assicurarsi, che la verticale condotta pel centro di gravità dell'arco non esca fuori del trapezio me.

CAP. XII.

Dell'equilibrio delle volte avendo riguardo alla tenacità dei cementi.

215. Dopo l'attrito si offre a considerare la tenacità del cemento, che legando i cunei, e ritenendoli dallo scorrere

l'un sopra l'altro concorre efficacemente a mantenere l'equilibrio, e la stabilità delle volte. Se questa resistenza fosse invincibile, l'arco sarebbe come tutto un masso, e qualunque figura s'avesse sarebbe sempre abbastanza sicuro, purchè i piediritti avessero forza bastevole a sostenerlo. Ma sebbene tal resistenza per la debole forza, e per la facile depravazione dei cementi non possa a gran pezza riguardarsi come insuperabile, pure ne conseguita di necessità questo effetto, che quando l'arco venga a crollare non si scomporrà in tutte le sezioni, come farebbe un arco composto di cunei staccati, ma da prima cederà nelle sezioni più deboli, dividendosi il masso dell'arco in tre o quattro pezzi al più: poichè l'arco non potrà cedere da principio se non



che o in due sezioni come Bb, Dd, ovvero in tre come Bb, Cc, Dd.

216. Di qui si apre una via assai facile di esaminare sotto questo aspetto la fermezza di qualunque arco proposto, ed insieme la forza dei piediritti per sostenerlo. Il che si farà considerando partitamente quelle due maniere, nelle quali l'arco potrebbe aprirsi, e per ciascuna di queste mosse paragonando le forze, che tendono ad imprimerla con quelle che vi contrastano.

217. Quella mossa dell'arco che apre soltanto le due sezioni Bb, Dd avviene allorquando l'arco superiore BCD discende tutto d'un pezzo scostando colle sue spinte laterali i piani Bb, Dd. Quella mossa poi, che insieme colle sezioni dei fianchi apre la cima Cc, avviene allorquando appunto il C discende girando attorno ai punti B, D, mentre questi punti o cedono lateralmente, o s'alzano girando attorno i termini A, E. Apresi allora l'arco al di dentro in c, e al di fuori in b, d appunto come, se il poligono ABCDE rui-

nasce aprendosi l'angolo C del colono, e chiudendosi gli angoli laterali. Or cercheremo per ambedue queste mosse le condizioni dell'equilibrio. E prima dai centri di gravità G, O dei pezzi BC, AB intenderemo calate le verticali GR, OT; e dai punti B, D condurremo BV, DV normali alle sezioni Bb, Dd, quali sezioni prolungheremo sicchè concorrono in N.

218. Tenda l'arco BCD a scendere verticalmente rimuovendo le sezioni Bb, Dd. Si chiami O il peso del solido AB, o G il peso del solido BC. Essendo 2G il peso dell'arco BCD intenderemo questo peso applicato al punto V, d'onde preme normalmente sui piani Bb, Dd spingendo secondo le rette VB, VD. Sarà la spinta orizzontale, che esso esercita in

$B = G \tan \angle BVK$ (§. 143) $= G \cot \angle BNK = \frac{G \cdot KN}{BK}$, e la spinta verticale $= G$. Ora la prima spinta tende a rimuovere orizzontalmente il solido AB, al quale moto resiste l'attrito con forza $f \cdot G + f \cdot O$: quindi

$$f \cdot O + f \cdot G = G \cdot \frac{KN}{BK} \text{ o } f \cdot O = G \left(\frac{KN}{BK} - f \right).$$

219. Di più la spinta orizzontale tendendo a rovesciare lo stesso solido AB attorno l'angolo A, opera col momento $G \cdot \frac{KN}{BK} \cdot BM$, cui resiste la spinta verticale G col momento $G \cdot AM$, ed il peso O col momento $O \cdot AT$. Uguagliando il momento della spinta a quello della resistenza e dividendo per BM avremo

$$O \cdot \frac{AT}{BM} = G \left(\frac{KN}{BK} - \frac{AM}{BM} \right).$$

220. Tenda ciascuno de' due pezzi BC, DC a girare intorno vertice dell'arco C rimuovendo i punti B, D. Riguardando l'arco siccome un poligono ABCDE mobile intorno i suoi angoli, compartiremo i pesi G, O sugli angoli C, B, A, E

così avremo, seguendo le denominazioni del (§. 146),

$$2P = 2G \cdot \frac{BR}{BK}; Q = G \cdot \frac{RK}{BK} + O \cdot \frac{AT}{AM}, V = O \cdot \frac{TM}{AM};$$

$$\text{tang. } m = \frac{BK}{CK}, \text{ tang. } n = \frac{AM}{BM}.$$

Sarà dunque (§. 146) la spinta orizzontale nel termine

$$A = G \cdot \frac{BR}{CK}, \text{ e la spinta verticale } = G + O, \text{ onde l'at-}$$

trito sarà $f \cdot G + f \cdot O$. Quindi affinchè il pezzo AB non sia rimosso orizzontalmente dovrà essere

$$f \cdot G + f \cdot O = G \cdot \frac{BR}{CK},$$

dalla quale

$$f \cdot O = G \left(\frac{BR}{CK} - f \right).$$

Dovendo poi essere (§. 146) $P \text{ tang. } m = (P + Q) \text{ tang. } n$, sostituiti in questi i valori superiori di $\text{tang. } m$, e $\text{tang. } n$ avremo

$$O \cdot \frac{AT}{BM} = G \left(\frac{BR}{CK} - \frac{AM}{BM} \right).$$

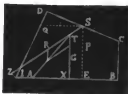
Di qui apparisce il modo di esaminare la fermezza di un arco dato. Coverrà per vari punti B dell' arco calcolare l'equazioni proposte, nelle quali se i primi membri, che rappresentano l'azione della resistenza, riusciranno per tutto maggiori dei secondi, che danno l'azione della spinta, potremo prometterci la total sicurezza dell' arco. La sezione più debole di tutte corrisponderà a quel punto B per cui l'eccesso della resistenza sulla spinta, o dei rispettivi momenti apparisca il minore. Che se fossero date le altre dimensioni, e volesse trovarsi la grossezza conveniente al piedritto possono servire le stesse equazioni. Il modo più fa-

cile sarà l'assumere prima pel piedritto una grossezza arbitraria, e quindi cercare il luogo B della sezione più debole. Allora per l'equazioni relative a quel punto B troveremo facilmente la grossezza cercata. Dicasi lo stesso di qualunque altra dimensione dell'arco, o del piedritto, che volesse determinarsi nella misura conveniente per la stabilità.

CAP. XIII.

Dell'equilibrio de' piedritti.

Per trattare dei casi più semplici e più usuali supporremo il piedritto simmetrico attorno d'un piano verti-



cale, che passi per la direzione della spinta SR. Qui pure cadrà il centro di gravità del piedritto, e siccome nel medesimo piano agiscono le forze, così in luogo di tutto il solido basterà considerare questoprofilo ABCD.

Decomposta la spinta in due forze l'una P verticale, e l'altra Q orizzontale, egli è chiaro, che il piedritto non potrà tutto spostarsi se non che o per moto progressivo da B verso I, o per moto rotatorio intorno l'angolo I.

221. **Si trova la resistenza del piedritto, ed il momento della resistenza.** Al moto progressivo resiste l'attrito. Sia M il peso del piedritto, sarà la pressione sulla base $IB = M + P$, e quindi sarà l'attrito, o la ricercata resistenza $= f.(M + P)$. Il momento della resistenza dee cercarsi relativamente al moto rotatorio. Si cali dal punto G la normale GX sulla base, e da un punto S preso ad arbitrio sulla direzione della spinta si cali similmente la normale SE. Sia $IX = k$, $IE = x$, $ES = y$. La spinta orizzontale Q col momento Qy tende a rovesciare il solido

attorno l'angolo I. Resiste a questo sforzo il peso M col momento Mk , e la spinta verticale P col momento Px : sarà dunque il total momento della resistenza $= Mk + Px$. Adunque per la stabilità dovrà essere

$$f(M + P) > Q; \quad Mk + Px > Qy.$$

Se vi fosse ugnaglianza fra la spinta, e la resistenza, e fra i rispettivi momenti, il piedritto reggerebbe tuttavia, ma ad ogui piccolo accrescimento della spinta vacillerebbe.

222. La seconda condizione si può esprimere e riconoscere anche senza risolvere la spinta nelle due forze P, Q . Si cali dal punto I la normale IZ sulla direzione della spinta: dovrà essere $M.IX > S.IZ$. Oppure si prolunghi la verticale condotta pel centro G sinchè concorra in T colla direzione della spinta. S'intendano applicate in T le due forze M, S , e si compia il parallelogrammo coi lati, che le rappresentano. La diagonale prolungata dovrà cadere sulla base di qua dal punto I verso B.

223. Se il piedritto sia un muro rettangolare, sia l'altezza $BC = a$, la grossezza $IB = b$, il peso specifico $= G$. Sarà $M = abG$, e $k = \frac{1}{2}b$. Perciò se il muro sostenga soltanto una spinta orizzontale Q , sarà la resistenza $= ab/G$: ed il momento della resistenza $= \frac{1}{2}ab^2G$: quindi ingrossando un muro rettangolare, la sua resistenza contro una spinta orizzontale s'accresce in ragione della grossezza, ed il momento della resistenza in ragione duplicata della grossezza.

223. **Applicazione dei risultamenti antecedenti.** Sia il muro alto metri 12, e del peso specifico 2000: questo deve reggere ad una spinta orizzontale di chilogrammi 4500, che si esercita verso la sommità: cercasi la grossezza per l'equilibrio.

124. Qui fa duopo avvertire, che prendendo il metro per unità delle misure lineari, il peso specifico 200 denota,

che un metro cubo del materiale, onde è composto il muro, pesa chil. 2000, e così il prodotto abG indicherà il peso del muro coll'unità di lunghezza un metro; 2°. che similmente dicendosi, che la spinta orizzontale vale chil. 4500, vuolsi intendere la spinta sulla lunghezza d'un metro; 3°. che il coefficiente dell'attrito può farsi $f = 0.8$, attrito per li mattoni. Per sicurezza maggiore faremo $f = 0.75$. Fatto le sostituzioni nelle equazioni $Q = abfG$, $Qy = \frac{1}{2}ab^2G$, avremo dalla prima $b = 0.25$, e dalla seconda $b = 2.12$. Basterebbe dunque al muro la grossezza di 25 centimetri per non essere spostato orizzontalmente; ma perchè non rovesci al di fuori esige per lo meno grossezza di metri 2.12.

225. Questa grossezza 2.12 richiesta pel puro equilibrio non parrà sufficiente ad assicurare (§. 221) la stabilità. Dee però riflettersi, che non avendo noi messa in conto la tenacità che lega il muro alla base, abbiain fatto la sua resistenza minore di quella che è realmente: onde colla trovata grossezza di 2.12 potrà benissimo sostenersi una spinta superiore ai chilogr. 4500. Pur gioverà crescerne alquanto la grossezza ad abbondante cautela.

226. Sin qui abbiamo considerato il piedritto come un solido di forma invariabile, da non poter spostarsi che tutto d' un pezzo. Siccome però la spinta potrebbe romperlo in alcuna delle sue sezioni, così converrà esaminare la sua fermezza anche sotto questo rapporto. Il che ci basterà di accennare, avendo già dato il modo di valutare (§. 220) la resistenza, che proviene dalla tenacità.

227. La spinta verticale P del peso che sostiene il piedritto tendo a schiacciarlo. Converrà quindi paragonarla colla di lui resistenza alla compressione, che si misura come nel (§. 166).

228. La spinta orizzontale Q tende a romperlo per traverso. E qui considerando una sezione qualunque del piedritto se ne troverà la resistenza rispettiva (§. 153). Solo

deve avvertirsi, che siccome il peso di quella porzione del piediritto, che poggia sulla sezione debole, aiuta la di lei tenacità, opponendosi alla rotazione, che la spinta Q tende ad indurre, così in luogo del momento della spinta si dovrà prendere l'eccesso di questo momento sopra il momento del peso, che le contrasta.

CAP. IV.

Rinfranchi de' piediritti.

229. Costumasi di rinfrancare esteriormente i piediritti rettangolari, o per mezzo d'una scarpa andante per tutta la loro lunghezza, o per mezzo di contrafforti a luogo a luogo distribuiti. Doppio è il vantaggio di questi rinfranchi: aumentano il peso del piediritto, e con ciò ne accrescono la resistenza: allontanano il suo centro di gravità dall'angolo esteriore attorno cui potrebbe rovesciarsi, e così accrescono vieppiù il momento della resistenza. Questi vantaggi possono agevolmente ridursi a calcolo.

230. **Trovare la resistenza d'un muro a scarpa contro la spinta orizzontale, ed il momento della resistenza.** Oltre le denominazioni del (§. 223) e de' precedenti, sia p il piede o sia la base della scarpa. I prodotti fM , Mk diverranno

$$a/G (b + \frac{1}{2} p); \quad aG \left(\frac{1}{2} b^2 + bp + \frac{1}{3} p^2 \right).$$

230. Il primo prodotto esprime la resistenza; il secondo esprime il momento della resistenza.

231. Adunque pel puro equilibrio deve essere

$$a/G (b + \frac{1}{2} p) = Q;$$

$$aG \left(\frac{1}{2} b^2 + bp + \frac{1}{3} p^2 \right) = Qy.$$

232. Sia come nell' esempio precedente $a = y = 12$, $Q = 4500$, $G = 2000$. E la scarpa suppongasi della sesta parte dell'altezza, onde sia $p = 2$. Si cerchi in quest'ipotesi la grossezza b del muro rettangolare. Dalla seconda equazione si caverà $b = 0,415$. Dalla prima non accade cercarne, poichè anche fatto $b = 0$, la resistenza rimane superiore alla spinta.

233. Che se volesse conservarsi al muro la grossezza di un metro, o si cercasse quale scarpa basterebbe per renderlo equilibrato, si farà $b = 1$, e si caverà $p = 1,23$. Basterebbe dunque una scarpa che fosse poco più d'un decimo dell'altezza.

234. Se la medesima scarpa fosse apposta dalla parte interna, sarebbe men vantaggiosa: che allora il momento della resistenza riuscirebbe soltanto

$$aG \left(\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} bp + \frac{1}{6} p^2 \right).$$

235. Minor vantaggio riporterebbe ancora chi invece di aggiungere la scarpa, volesse ingrossare il muro d'altrettanto, accrescendone la grossezza di $\frac{1}{2}p$; poichè il momento della resistenza riuscirebbe

$$aG \left(\frac{1}{2} b^2 + \frac{1}{2} bp + \frac{1}{8} p^2 \right).$$

236. **Trovare la resistenza d'un muro esternamente difeso da contrafforti parallelepipedi, eguali ed equidistanti, ed il momento della resistenza.**



Rappresenti la figura la pianta del piedritto, e i due punti L, G dividano per mezzo gl'intervalli dei contrafforti. Supponendosi che la spinta orizzontale operi egualmente su tutta la lunghezza del muro, basterà considerarne il

pezzo chiuso tra le sezioni Ll , Gg . Condotta un piano verticale per la sezione di mezzo AB , cadrà su questo piano così il centro di gravità del solido, come la direzione della spinta tendente da B verso A .

238. Posto ciò, sia l'altezza del muro $= a$; la sua grossezza $Ll = BH = b$; la lunghezza del contrafforte $HA = c$; la di lui grossezza $MN = PQ = p$; l'intervallo $LG = Hk = d$.

239. Qui i due prodotti fM , Mk riusciranno

$$afG (bd + cp); \quad aG \left(\frac{1}{2} b^2 d + bcd + \frac{1}{2} c^2 p \right),$$

de' quali il primo dà la resistenza; il secondo dà il momento della resistenza.

240. Egnagliando questi valori alla spinta Q ed al suo momento Qy , si avranno come prima le condizioni dell'equilibrio; e date le dimensioni del muro o del rinfiameo a riserva di una, si potrà questa determinare siccome conviene per l'equilibrio.

241. Men vantaggioso si troverebbe il contrafforte interno; e meno ancora, se tutta la solidità de' contrafforti si convertisse in uniforme ingrossamento del muro.

242. Talvolta il contrafforte è un prisma di base trapezia, essendo la coda PQ maggiore o minore del collo o sia radice MN . Sia come prima $MN = p$, e sia $PQ = q$.

243. Allora pel contrafforte esterno il momento della resistenza si troverà

$$aG \left(\frac{1}{2} b^2 d + bcd + \frac{1}{6} c^3 (2p + q) \right),$$

e pel contrafforte interno

$$aG \left(\frac{1}{2} b^2 d + \frac{1}{2} bc (p + q) + \frac{1}{6} c^3 (p + 2q) \right).$$

244. Da che si vede essere più vantaggiosa ai contrafforti esterni la forma $p > q$; ed agl'interni la forma $p < q$.

245. Aggiungiamo uu esempio a dichiarazione delle proposte formole. Sia la spinta nella lunghezza d' un metro

= 4500; G=2000; a=y=12; d=5; c=3; p=2,3; q=1,6.

Si cerca la grossezza b che dovrà avere il muro, affinché il momento della resistenza pareggi quello della spinta. Si suppone il contrafforte apposto esteriormente.

246. Qui è da notare che ponendosi = 4500 la spinta sulla lunghezza d'un metro, la spinta sulla lunghezza d che val cinque metri sarà cinque volte maggiore, onde sarà $Q=22500$. Ora introdotti i valori numerici nell'equazione

$$aG \left(\frac{1}{2} b^2 d + bcd + \frac{1}{6} c^2 (2p + q) \right) = Qy,$$

si avrà $b = 0,127$. E tal grossezza porrà il muro in istato d'equilibrare la spinta.

CAP. XV.

Della spinta de' terrapieni.

247. Posto un peso R sopra un piano inclinato alla verticale coll'angolo m , cercasi qual potenza orizzontale A sarà bastante a trattenerlo, sicchè non corra giù pel piano, avendo rignardo all'attrito.

248. Decomposta ciascuna delle forze R , A in due, l'una parallela, l'altra normale al piano, ne risulterà parallelamente al piano la forza $R \cos.m - A \sin.m$, e normalmente al piano la forza $R \sin.m + A \cos.m$. Ora per l'equilibrio deve la prima di queste forze eguagliar precisamente l'attrito. Sarà dunque

$$R \cos.m - A \sin.m = f R \sin.m + f A \cos.m,$$

onde si trae

$$A = R \cdot \frac{1 - f \tan.m}{\tan.m + f}.$$

249. Quindi se invece d'una potenza orizzontale, il peso R fosse trattenuto da un muro, o da un ostacolo qualun-

que, la spinta orizzontale esercitata dal peso contro l'ostacolo sarebbe quella stessa

$$R \cdot \frac{1 - f \operatorname{tang}.m}{\operatorname{tang}.m + f}.$$

250. **Spinta del terrapieno.** Determinare la spinta orizzontale del terrapieno BCEF contro del muro ABCD, e il momento di questa spinta per rovesciarlo attorno l'angolo A. Consideriamo la spinta del triangolo di terra BCE, di cui la scarpa BE declina dalla verticale coll'angolo



CBE = m . Le rette PM, pm parallele a BE chiudano il trapezio elementare PpmM. Sia $BC = a$, $CP = x$, $Pp = dx$; sarà il trapezio PpmM = $x dx \operatorname{tang}.m$; e chiamando g il peso specifico della terra, sarà il peso di quel trapezio = $g x dx \operatorname{tang}.m$. Adunque la spinta orizzontale ch'esso esercita sulla retta Pp sarà (§ 249)

$$g x dx \operatorname{tang}.m \cdot \frac{1 - f \operatorname{tang}.m}{\operatorname{tang}.m + f},$$

o sia

$$g x dx \cdot \frac{1 - f \operatorname{tang}.m}{1 + f \cot.m}.$$

251. Facendo per brevità $\frac{1 - f \operatorname{tang}.m}{1 + f \cot.m} = M$, sarà la suddetta spinta $M g x dx$, ed integrando, e poscia facendo $x = a$, sarà la spinta totale $\frac{1}{2} a^2 g M$.

252. Similmente il momento della spinta elementare esercitata sopra Pp è $M g (a - x) x dx$; ove integrando, e poi facendo $x = a$, avremo il total momento della spinta

$$= \frac{1}{6} a^3 g M.$$

253. Resta a fissare l'angolo m . Si osservi che tanto la spinta quanto il suo momento si annullano, o sia $\text{tang.}m=0$, o sia $\text{tang.}m=\frac{1}{f}$. Tra questi due valori havvi dunque un valore intermedio, cui risponde la massima spinta, e il massimo momento. Questo valore si trova facendo $dM=0$, e riesce

$$\text{tang.}m = -f + \sqrt{1+f^2}.$$

Sostituendo questo valore in quello di M trovasi la spinta

$$\frac{1}{2} a^2 g [-f + \sqrt{1+f^2}]^2 = \frac{1}{2} a^2 g \text{tang.}^2 m,$$

ed il momento della spinta

$$\frac{1}{6} a^2 g [-f + \sqrt{1+f^2}]^3 = \frac{1}{6} a^2 g \text{tang.}^3 m,$$

il che si cercava.

254. L'angolo che ha per tangente $\frac{1}{f}$ è (§. 18) l'angolo della scarpa che prenderebbe la terra naturalmente da se, quando non fosse sostenuta da verun rivestimento.

255. L'angolo m che ha per tangente $-f + \sqrt{1+f^2}$ è precisamente la metà dell'angolo che ha per tangente $\frac{1}{f}$, come facilmente può verificarsi mediante la nota espressione della tangente dell'angolo doppio.

256. Quindi la linea BE , che determina quel triangolo di terra, che esercita la massima spinta contro il muro di rivestimento, divide per metà l'angolo fatto colla verticale dalla scarpa che prenderebbe da se naturalmente la terra sciolta.

257. Abbiamo veduto che le terre sabbiose e scorrevoli si dispongono (§. 20) sopra un declivio di gradi 60 dalla verticale, e le terre forti sopra un declivio di gr. 54. Dunque per un terrapieno composto di terre sciolte avremo $m=30^\circ$, e per un altro di terra forte sarà $m=27^\circ$.

258. Quindi pel primo sarà il valor della spinta $= \frac{1}{6} a^2 g$,
ed il momento della spinta $= \frac{1}{18} a^3 g$. Pel secondo la spinta
sarà solamente $= \frac{1}{8} a^2 g$, ed il suo momento $= \frac{1}{24} a^3 g$.

259. Conoscendosi la spinta orizzontale del terrapieno, e il suo momento, sarà facile proporzarle la resistenza del rivestimento ABCD, trovandone le dimensioni opportune per l'equilibrio.

260. Sia il muro ABCD rettangolare alto metri 12 al pari del terrapieno. Sia $G = 2000$ qual è comunemente il peso specifico de' mattoni; $g = 1428$ quale suol essere il peso specifico delle terre forti, giacchè di tal qualità supporremo essere il terrapieno. Si cerchi la grossezza b da darsi al muro onde il momento della resistenza pareggi il momento della spinta.

261. Il momento della spinta si troverà $= 102816$; a cui mettendo uguale il momento della resistenza (§. 223) $\frac{1}{2} ab^2 G$, troveremo $b = 2,93$.

262. Dando al muro una scarpa d'un sesto dell'altezza, si troverebbe similmente §. 231 la grossezza $b = 1,15$.

CAP. XVI.

Della fermezza de' modelli.

263. Sperimentata la fermezza d'un modello di macchina o d'edificio, non senza molta cautela vuolsi procedere a conchiuderne la fermezza dell'edificio o della macchina stessa.

264. E prima convien distinguere fra le spinte che tendono semplicemente a spostare le parti, e quelle che tendono a spezzarle. Tradotto il sistema dal piccolo al grande,

le prime crescono in egual proporzione colle resistenze, le seconde crescono in proporzion maggiore; ond' è che per rapporto a queste ultime, quanto è più grande la fabbrica, tanto a proporzione è più debole.

265. Poi fra queste azioni medesime convien distinguer tre classi: altre tendon a svellere le parti per distrazione; altre a romperle per traverso; altre a schiacciarle per compressione. Appartiene alla prima classe lo stiramento che soffrono le chiavi o le catene delle Volte, e le piane dei tetti; alla seconda il carico che tenta piegare o rompere lo travi orizzontali o inclinate; alla terza il peso che aggrava verticalmente i muri e le colonne.

266. Sia un lato del modello al lato omologo della costruzione come 1: n . La spinta che tende a distrarre, o a rompere per traverso le parti cresce dal piccolo al grande come 1: n^2 ; e la resistenza a queste rotture cresce soltanto come 1: n^3 .

267. La prima asserzione è manifesta: poichè le spinte debbon crescere come i pesi delle parti che spingono, e questi crescono in ragion triplicata dei lati omologhi.

268. Essendo poi le dimensioni del solido modulare a , b , c , saranno quelle dello stesso solido nella fabbrica na , nb , nc . Ora la resistenza assoluta che contrasta alla forza distraente, cresce nella ragione (§. 151) $ab: na.nb$; e la resistenza rispettiva che contrasta alla forza tendente a rompere per traverso, cresce nella ragione (§. 154)

$$\frac{a^2b}{c} : \frac{n^3a^2.nb}{nc}.$$

Entrambe queste ragioni si riducono a quella di 1: n^3 .

269. Perciò quei pezzi che a tali spinte soggiacciono avranno tanto minor fermezza nella fabbrica che non hanno nel modello, quanto sarà maggiore il numero n ; il quale potrà crescere a segno che la fabbrica non possa più reggere.

270. Adunque nel tradurre il modello dal piccolo in grande non si può passare un certo limite d'ingrandimento.

271. Sia P il maggior peso cui possa reggere uno dei travicelli del modulo, e p quel peso o spinta che esso attualmente sostiene. Il maggior peso cui potrà reggere il trave corrispondente della fabbrica sarà n^3P , ed il peso che esso attualmente sosterrà n^3p . Dovrà dunque essere

$$n^3p < n^3P, \text{ e tutto al più } n^3p = n^3P, \text{ onde } n = \frac{P}{p}.$$

E questa sarà la maggior grandezza a cui quel pezzo potrà tradursi.

272. Che se volesse pure accrescersi il modello a piacimento; conservandogli tuttavia sufficiente fermezza, sarà necessario nell'ingrandire ciascun pezzo alterare qualcuna delle sue dimensioni.

273. Vogliasi per esempio conservare al trave la larghezza nb , e la lunghezza nc proporzionata al modello, e si cerchi la grossezza xa opportuna perchè la sua resistenza pareggi la spinta ch'esso dovrà sostenere.

274. Sarà la resistenza del travicello a quella del trave come

$$\frac{a^3b}{c} : \frac{x^3a^3nb}{nc},$$

o sia come 1: x^3 . Quindi il trave potrà tutt' al più sostenere il peso Px^3 ; ma esso sosterrà infatti il peso n^3p . Dunque dovrà essere per lo meno $Px^3 = n^3p$, o sia

$$x = n \sqrt[3]{\frac{n^3p}{P}}.$$

275. Se il trave fosse di sezione quadrata, e ritenendo la lunghezza nc si cercasse il lato xa , si troverebbe nella stessa guisa

$$x = n \sqrt[3]{\frac{n^3p}{P}}.$$

276. La spinta che tende a schiacciare le parti per compressione cresce dal piccolo al grande come $1:n^3$; e la resistenza cresce soltanto come $1:n$.

277. Di fatti la resistenza alla compressione cresce nel rapporto (§. 167)

$$\frac{a^3b}{c^3} : \frac{n^3a^3nb}{n^3c^3},$$

che è quello di $1:n$.

278. Sia dunque P il maggior carico che possa portare il muro o il pilastro modulare, e sia p il carico di cui realmente è gravato. Pel muro o colonna analoga sarà nP il maggior peso che potrà sostenere, ed n^3p il peso che sosterrà realmente. Quindi potrà essere tutt'al più

$$n^3p = nP, \text{ onde } n = \sqrt[3]{\frac{P}{p}},$$

massimo termine dell'ingrandimento.

279. Che se ritenendo la lunghezza, o vogliam dire altezza nc , e la larghezza nb volessc darsi al solido tal grossezza xa , per cui nell'ingrandirsi non indebolisca a segno di rompersi, si troverebbe come sopra (§. 274)

$$x = n^3 \sqrt[3]{\frac{p}{P}}$$

per lo meno.

280. E trattandosi d'un pilastro a base quadrata, o di una colonna cilindrica, cercandosi parimente il lato o diametro xa , verrebbe

$$x = n \sqrt[3]{\frac{n^3p}{P}}.$$

281. Gli esposti principj daranno norma sicura a giudicare della robustezza d'una costruzione, da prove che se ne facciano sul modello. Nel quale ove siasi esplorata la forza di ciascun pezzo, ed il limite dell'ingrandimento che esso comporta, ben si vede che nell'ingrandire tutto il modello

dovrà starsi al di sotto del più piccolo fra questi limiti. E quando pur vogliasi oltrepassarlo, veggiamo come convenga alterare le misure di ciascun pezzo per cooservargli conveoiente fermezza.

CAPO XVII.

Equazione generale dell'equilibrio dedotta dalla considerazione delle velocità virtuali.

282. **Idea delle velocità virtuali.** Si supponga un sistema qualunque di forze io equilibrio, e queste siano ridotte ad uoa per ogni punto per mezzo della composizione. Si ammetta, che per uo istante di tempo cessi questo equilibrio a causa della modificaziooe di una qualuoue delle dette forze, in tal caso ciascun punto del sistema avrà una velocità, ossia nel detto istante di tempo, o ocl tempo infinitesimo descriverà una lineola retta: queste si chiamano *velocità virtuali*. Se il sistema oon fosse lihero, ma assoggettato a condizioni, come sarebbe che o tutti o in parte i punti del sistema dovessero rimanere sopra una lioea, o sopra una superficie; che i punti dovessero rotare intorno ad uo punto, o asse fisso; o altre condizioni: in tal caso s'intende, che i moti minimi del sistema di forze per la cessazione istantanea dell'equilibrio dovrebbero essere compatibili con queste condiziooi, cioè, che i moti minimi dovrebbero far rimanere i punti sulla curva o sulla superficie; che dovrebbero conservare la distanza iovariabile dal puoto o dall'asse di rotazione. Da ciò possiamo stabilire, che per *velocità virtuali dei punti di un sistema qualunque di forze in equilibrio si debbono intendere le velocità che in un istante acquisterebbono i detti punti per le diverse maniere di cessare l'equilibrio compatibili colle condizioni, cui deve soddisfare il sistema; e questa cessazione a causa delle modifica-*

zioni che potrebbero subire le forze del sistema; queste velocità virtuali poi sono lineole rette infinitesime, che in un tempo infinitesimo percorrerebbero i diversi punti per le varie maniere di cessare l'equilibrio.

283. Velocità virtuali stimate nelle forze. Queste lineole rette hanno un estremo comune col punto d'applicazione della rispettiva forza, e l'altro nello spazio. Se da questo sulla retta della forza si cala una normale si avrà la proiezione della detta lineola sulla retta della forza, o della velocità virtuale del punto d'applicazione della forza stessa. Questa proiezione si chiama *velocità virtuale stimata nella forza*. La direzione della velocità virtuale può esser tale, che dia la sua proiezione o sulla forza, o nel prolungamento di essa. Nel primo caso la velocità stimata nella forza si considera come positiva, nel secondo si considera come negativa. Si vede poi chiaro, che la detta velocità stimata sarà zero se la direzione della velocità virtuale sarà normale alla forza.

284. Il teorema generale dell'equilibrio espresso in velocità virtuali è, che se si ha l'equilibrio, deve essere zero la somma delle forze moltiplicate nelle velocità virtuali stimata in esse, e viceversa. Così se siano P, Q, R ec. le forze del sistema e p, q, r ec. le velocità stimate in esse, la condizione necessaria e sufficiente dell'equilibrio è espressa dall'equazione

$$Pp + Qq + Rr \text{ ec.} = 0.$$

285. Dimostrazione dell'equazione generale dell'equilibrio. Per dimostrare la proposta equazione s'immagino attaccate ai punti del sistema altrettante taglie, ed altrettante siano attaccate in punti fissi dello spazio: si esprimano con a, a' due taglie l'una mobile col sistema, e l'altra fissa; b, b' indichino le taglie d'una altra coppia; analogamente con c, c' indichiamo due altre taglie, e così di seguito. Si

supponga una fune flessibile, un estremo della quale sia fisso: passi poi essa successivamente per le girelle della taglia a mobile, e per quelle della taglia fissa a' ; e le girelle di ambedue le taglie siano di tali grandezze e disposte in guisa, che i capi di fune che passano da una taglia all'altra siano perfettamente paralleli. Quando si sono esaurite tutte le girelle della prima coppia di taglie, il capo di fune residuo si porti a passare per le girelle delle taglie b, b' , ed essendo state tutte impiegate, il capo di fune residuo si porti alla terza coppia delle taglie c, c' , e vi si faccia passare come nell'altre due. Si esauriscano così tutte le coppie di taglie del sistema, e l'ultimo capo di fune, che vi rimane, si faccia passare per la gola di una girella fissa, in guisa che all'estremità del capo da questa pendente si applichi un peso M . Quello, che è interessante per la dimostrazione è, che tutti i capi di fune siano paralleli. Ora quelli della prima coppia abbiamo veduto che lo sono. Affinchè ciò avvenga ai capi di fune che passano da una coppia all'altra bisogna dispor fra ciascuna coppia due girelle fisse, onde l'ultimo capo di fune, che parte da una coppia, sia parallelo ai capi di fune di questa coppia, e passando alla seconda riesca parallelo ai capi di fune di questa.

286. Essendo così disposto il sistema, cioè che tutti i capi di fune nella stessa coppia di taglia sono paralleli si vedrà chiaro, che il peso appiccato all'ultimo capo di fune pendente dalla girella fissa produrrà la stessa tensione in tutti i capi di fune delle diverse coppie di taglie, e la somma delle tensioni dei capi di fune, che in ciascuna coppia vanno alle taglie mobili saranno tante forze prodotte su i punti del sistema ai quali queste taglie mobili sono attaccate. Si dicano dunque P, Q, R ec. i numeri dei capi di fune, che passano per le girelle delle taglie mobili nella prima seconda terza ec. coppia. Se si dica uno la tensione comune di questi capi di fune, le dette quantità P, Q, R ec. esprimeranno, eziandio le forze

prodotte su i punti del sistema dal peso M . Dopo ciò si vede chiaro, che la condizione dell'immobilità del sistema, o dell'equilibrio delle forze P, Q , ec. è, che il peso M , non discenda: perchè, se ha luogo l'equilibrio o l'immobilità del sistema, il peso non discenderà, e se non discenderà i punti non si muoveranno. Per stabilire in calcolo questa condizione si supponga concepire il sistema un moto minimo qualunque, per questo le coppie di taglie si avvicineranno, e si allontaneranno fra loro, o parte si avvicineranno, e parte si allontaneranno fra loro. Esprima p la retta infinitesima di avvicinamento fra le due taglie a, a' , e q, r , le rette di allontanamento delle due coppie di taglie b, b' ; c, c' , e così di seguito. Essendo p la lineola retta di approssimazione delle due prime taglie, ripetuta questa per P , numero dei capi di fune che passano per la taglia mobile, Pp dà l'accorciamento della total fune delle taglie della prima coppia. Così essendo q la lineola retta di allontanamento delle due taglie della seconda coppia, il prodotto Qq sarà il totale allungamento della fune in questo secondo sistema di taglie, ed Rr l'allungamento nel terzo: dunque la quantità $Pp - Qq - Rr$ ec. esprimerà l'eccesso degli accorciamenti sugli allungamenti della total fune, che passa per tutte le coppie di taglie. Ora questo residuo di accorciamento produrrà l'aumento del capo di fune pendente dalla girella fissa, cui è appiccato il peso, o sia farà discendere questo peso: dunque la condizione, onde quel peso non discenda sarà espressa del mandare a zero quell'eccesso di accorciamento; ma il non discendere del peso trae la condizione necessaria e sufficiente dell'equilibrio, dunque questa condizione sarà espressa da

$$Pp - Qq - Rr \text{ ec. } = 0.$$

Ora è evidente, che p, q, r sono le velocità virtuali dei punti stimate nelle forze P, Q, R , e che p è secondo la di-

rezione della forza P , o producente la diminuzione della retta, sulla quale questa agisce; e che q, r sono rette nel prolungamento di Q, R , o producenti gli aumenti di queste: dunque l'equazione antecedente esprime, che la condizione necessaria e sufficiente dell'equilibrio di un sistema qualunque di forze è, che la somma delle forze moltiplicate per le velocità virtuali dei loro punti di applicazione stimate nelle dette forze è zero, supponendo positivi i detti prodotti, o come si dicono momenti delle forze, dove le velocità stimate sono nelle direzioni delle forze, o tendenti a diminuirle, e negativi i momenti, nei quali le velocità stimate sono nel prolungamento delle forze, o tendono a crescerle. Si potrebbe però obbiettare alla dimostrazione fatta, non essere necessario per la condizione di equilibrio, che $Pp - Qq - Rr$ ec. sia zero; imperocchè basta, che questa quantità riesca negativa; perchè in tal caso vuol dire, che la somma degli allungamenti della fune supera la somma degli accorciamenti; ossia, che l'espressione $Pp - Qq - Rr$ ec. ci dà un residuo di allungamento: ma l'allungamento della total fune delle taglie dà l'ascensione del peso, e questa è impossibile: dunque è impossibile il moto del sistema; cioè la detta quantità negativa è altra condizione dell'equilibrio del proposto sistema di forze.

287. Si rifletta però che le quantità infinitesime p, q, r ec. saranno date in funzioni delle variazioni delle coordinate dei punti del sistema, delle quali alcune saranno indeterminate, per esprimere la possibilità del moto dei punti del sistema. In questa indeterminazione, se $Pp - Qq - Rr$ ec. è negativa, si potrà dare alle indeterminate tal valore da riuscire positiva questa espressione, o da rendere possibile un residuo di accorciamento della fune delle taglie, ossia da rendere possibile la discesa del peso.

288. Sia un sistema qualunque di forze P, P', P'' ec. Se cominciando dai punti di applicazione di esse si portino

sulle loro direzioni le rette p, p', p'' ec. fino a punti fissi le lineole rette infinitesime p, q, r ec. considerate di sopra (§. 286.) si potranno considerare come i differenziali delle attuali rette p, p', p'' ec., e quindi in loro vece si potrà porre dp, dp', dp'' ec.: allora l'equazione generale dell'equilibrio sarà

$$Pdp + P'dp' + P''dp'' \text{ ec.} = 0 \quad (1)$$

ritenendo di far negativi quei termini, o momenti nelli quali la velocità virtuale stimata secondo la forza sia contraria alla sua direzione, o tenda ad accrescerla.

289. Valori in coordinate delle velocità stimate.

Se x, y, z sono le coordinate del punto di applicazione di P , o del principio di p , e siano a, b, c le coordinate dell'estremità fissa dello stesso p , sarà

$$p = \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}, \text{ e}$$

$$dp = \frac{(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz}{p};$$

dove si vede, che il dp è dato in funzione delle variazioni dx, dy, dz delle coordinate, secondo che si è detto (§. 287.); come saranno date in funzioni delle variazioni delle loro coordinate i dp', dp'' ec.; delle quali totali variazioni alcune saranno indeterminate, affinchè possa essere possibile un moto minimo vario, del sistema, ancorchè sia obbligato a qualche condizione.

290. Dalla equazione generale si deducono l'equazioni per l'equilibrio del moto progressivo. Sia

$$p = \sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]},$$

$$p' = \sqrt{[(x'-a')^2 + (y'-b')^2 + (z'-c')^2]} \text{ ec.}$$

Si ponga

$$x' = x + \xi, \quad y' = y + \eta, \quad z' = z + \zeta,$$

$$(a) \quad x'' = x + \xi', \quad y'' = y + \eta', \quad z'' = z + \zeta'$$

.

Si vede chiaro, che le lettere greche sono le coordinate di tutti i punti aventi per origine il punto di coordinate x, y, z . Poichè il sistema si suppone invariabile, si vede chiaro, che nel traslocamento minimo del sistema le dette quantità espresse da lettere greche saranno invariabili, e solo varieranno le coordinate x, y, z . Ora dp, dp', dp'' , ec. esprimono differenziali di variazione di luogo, e perciò anche l'esprimeranno i $dx, dy, dz; dx', dy', dz'$ ec.: dunque differenziando l'equazioni (a) avremo

$$dx=dx', dy=dy', dz=dz; dx''=dx, dy''=dy, dz''=dz \text{ ec.}$$

Dopo ciò avremo

$$dp = \frac{(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz}{p}$$

$$dp' = \frac{(x'-a')dx + (y'-b')dy + (z'-c')dz}{p}$$

.

Sostituendo questi valori nell'equazione (1) (§. 288.) avremo

$$\left[P \left(\frac{x-a}{p} \right) + P' \left(\frac{x'-a'}{p'} \right) + P'' \left(\frac{x''-a''}{p''} \right) \text{ ec.} \right] dx +$$

$$\left[P \left(\frac{y-b}{p} \right) + P' \left(\frac{y'-b'}{p'} \right) + P'' \left(\frac{y''-b''}{p''} \right) \text{ ec.} \right] dy +$$

$$\left[P \left(\frac{z-c}{p} \right) + P' \left(\frac{z'-c'}{p'} \right) + P'' \left(\frac{z''-c''}{p''} \right) \text{ ec.} \right] dz = 0.$$

Le variazioni dx, dy, dz di traslocamento minimo qualunque del punto di coordinate x, y, z sono indeterminate, quindi, affinchè si verifichi l'autecedente equazione debbono essere zero i loro coefficienti: perciò

$$P \left(\frac{x-a}{p} \right) + P' \left(\frac{x'-a'}{p'} \right) + P'' \left(\frac{x''-a''}{p''} \right) \text{ ec.} = 0$$

$$P \left(\frac{y-b}{p} \right) + P' \left(\frac{y'-b'}{p'} \right) + P'' \left(\frac{y''-b''}{p''} \right) \text{ ec.} = 0$$

$$P \left(\frac{z-c}{p} \right) + P' \left(\frac{z'-c'}{p'} \right) + P'' \left(\frac{z''-c''}{p''} \right) \text{ ec.} = 0$$

Si dicano α, β, γ gli angoli, che la P fa cogli assi ortogonali delle x, y, z e siano $\alpha', \beta', \gamma'; \alpha'', \beta'', \gamma''$ ec. gli angoli analoghi delle forze P', P'' ec: sarà evidentemente

$$\frac{x-a}{p} = \cos.\alpha, \quad \frac{y-b}{p} = \cos.\beta, \quad \frac{z-c}{p} = \cos.\gamma,$$

e così degli altri; quindi l'equazioni antecedenti per l'equilibrio del moto progressivo diverranno.

$$P \cos.\alpha + P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' \text{ ec.} = 0$$

$$(2) \quad P \cos.\beta + P' \cos.\beta' + P'' \cos.\beta'' \text{ ec.} = 0$$

$$P \cos.\gamma + P' \cos.\gamma' + P'' \cos.\gamma'' \text{ ec.} = 0.$$

291. Risultante di due forze congiunte ad angolo. Per interpretare l'equazioni (2) si suppongano tre sole forze P, P', P'' congiunte in un punto, giacenti in un piano, che sia quello delle x, y , ed in equilibrio. In questo caso una qualunque delle tre è la risultante delle altre due volta in senso contrario. Nell'ipotesi fatta essendo

$$\gamma = \gamma' = \gamma'' = 90^\circ$$

sussisteranno le due equazioni

$$P \cos.\alpha + P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' = 0$$

$$P \cos.\beta + P' \cos.\beta' + P'' \cos.\beta'' = 0$$

Ora evidentemente gli angoli β, β', β'' sono complementi degli $\alpha, \alpha', \alpha''$, dunque avremo ancora

$$P \cos.\alpha + P' \cos.\alpha' + P'' \cos.\alpha'' = 0$$

$$(3) \quad P \sin.\alpha + P' \sin.\alpha' + P'' \sin.\alpha'' = 0$$

Si lascino nei due primi membri le quantità $P \cos. \alpha, P \sin. \alpha$, portando le altre nei secondi membri, si facciano i quadrati delle equazioni provenienti, e si sommino, avremo

$$P^2 = P'^2 + P''^2 + 2 P' P'' (\cos. \alpha' \cos. \alpha'' + \sin. \alpha' \sin. \alpha'') = \\ P'^2 + P''^2 + 2 P' P'' \cos. (\alpha'' - \alpha').$$

Ora $\alpha'' - \alpha'$ è l'angolo fatto dalle due forze P', P'' che diremo θ : dunque

$$(4) \quad P^2 = P'^2 + P''^2 + 2 P' P'' \cos. \theta$$

292. Si moltiplichi la prima delle equazioni (3) per $\sin. \alpha$, e la seconda per $\cos. \alpha$, e dal primo risultamento si sottragga il secondo, avremo

$$P' (\sin. \alpha \cos. \alpha' - \cos. \alpha \sin. \alpha') = \\ P'' (\sin. \alpha'' \cos. \alpha - \cos. \alpha'' \sin. \alpha),$$

ossia

$$(5) \quad P' \sin (\alpha - \alpha') = P'' \sin (\alpha'' - \alpha)$$

Se fra l'equazioni (3) si fosse eliminata la P'' si sarebbe avuto

$$(6) \quad P \sin (\alpha - \alpha'') = P' \sin (\alpha' - \alpha)$$

Dalle equazioni (5), (6) si ricava, che una qualunque delle tre forze è come il seno dell'angolo fatto dalle altre due. Riunendo questo teorema ricavato dalle (5), (6), a quello che si ricava dalla (4) si vede il teorema del parallelogrammo delle forze; e perciò l'equazioni (2) esprimono, che per l'equilibrio di moto progressivo d'un sistema qualunque si richiede, che le somme delle componenti delle forze secondo tre assi ortogonali siano zero.

293. **Equilibrio di rotazione.** Si supponga, che l'asse della x sia l'asse di rotazione delle forze P, P', P'' ec. Si suppongano le proiezioni di p, p', p'' ec. nel piano delle x, y ; evidentemente le coordinate dei due estremi della proiezione di p saranno a, b, x, y ; e degli estremi della

proiezione di p' saranno a', b', x', y' ec. Dall'origine delle coordinate si conduca la retta, o raggio vettore R all'estremo della proiezione di p di coordinate a, b , ed il raggio vettore r all'estremo di coordinate x, y , e si dicano A, φ gli angoli, che i detti raggi vettori fanno coll'asse delle x . Si faccia lo stesso nelle proiezioni delle p', p'' ec., accennando analogamente le dette quantità R, r, φ : avremo dopo ciò

$$x = r \cos. \varphi, y = r \sin. \varphi; x' = r' \cos. \varphi', y' = r' \sin. \varphi';$$

$$x'' = r'' \cos. \varphi'', y'' = r'' \sin. \varphi'' \text{ ec.}$$

Avremo similmente

$$a = R \cos. A, b = R \sin. A; a' = R' \cos. A', b' = R' \sin. A' \text{ ec.}$$

Se si supponga

$$\varphi' = \varphi + \sigma, \varphi'' = \varphi + \sigma' \text{ ec.}$$

si vedrà, che σ, σ' ec. sono gli angoli fatti dai raggi vettori r', r'' ec. con r ; quindi nella rotazione del sistema intorno all'asse delle z rimarranno invariabili, e solo varierà l'angolo φ . Non accade avvertire, che nella detta rotazione gli r, r', r'' ec. saranno invariabili. Dopo ciò avendosi

$$p = \sqrt{[(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2]}$$

se vi si sostituiscano i valori antecedenti di x, y, a, b , si facciano i quadrati, e facili riduzioni di trigonometria avremo

$$p = \sqrt{[r^2 - 2rR \cos.(\varphi - A) + R^2 + (z - c)^2]}$$

Qui nella rotazione intorno all'asse delle z non vi è di variabile che il φ ; differenziando avremo

$$dp = \frac{rR \sin.(\varphi - A)}{p} d\varphi.$$

Similmente avremo

$$dp' = \frac{r'R' \text{sen.}(\varphi' - A') d\varphi}{P'}$$

$$dp'' = \frac{r''R'' \text{sen.}(\varphi'' - A'') d\varphi}{P''}$$

quindi l'equazione

$$P dp + P' dp' + P'' dp'' \text{ ec.} = 0$$

diverrà

$$rRP \frac{\text{sen.}(\varphi - A)}{P} + r'R'P' \frac{\text{sen.}(\varphi' - A')}{P'} +$$

$$r''R''P'' \frac{\text{sen.}(\varphi'' - A'')}{P''} \text{ ec.} = 0,$$

e se si supponga

$$P = p, P' = p', P'' = p'' \text{ ec.},$$

ciò che si può fare a causa della grandezza arbitraria di p, p', p'' ec., avremo

$$rR \text{sen.}(\varphi - A) + r'R' \text{sen.}(\varphi' - A') + r''R'' \text{sen.}(\varphi'' - A'') = 0$$

Evidentemente $rR \text{sen.}(\varphi - A)$ è il doppio dell'area del triangolo fatto dai due raggi vettori r, R , che fanno angolo $\varphi - A$, e così degli altri termini. Ora questi triangoli come si è detto hanno per base le proiezioni di p, p', p'' ec. o le proiezioni delle forze P, P' ec. o finalmente le componenti di queste forze sul piano delle x, y , che sono

$$P \text{ sen.}\gamma, P' \text{ sen.}\gamma', P'' \text{ sen.}\gamma''.$$

Se dunque si dicano Π, Π', Π'' ec. le normali calate dai vertici dei detti triangoli, che sono nell'asse delle z , sulle dette basi o sulle componenti

$$P \text{ sen.}\gamma, P' \text{ sen.}\gamma', P'' \text{ sen.}\gamma'' \text{ ec.}$$

i prodotti

$$P\Pi \text{ sen.}\gamma, P'\Pi' \text{ sen.}\gamma', P''\Pi'' \text{ sen.}\gamma'' \text{ ec.}$$

saranno eziandio i doppi dell'arce dei detti triangoli, e quindi

$$P\Pi \text{ sen.}\gamma + P'\Pi' \text{ sen.}\gamma' + P''\Pi'' \text{ sen.}\gamma'' \text{ ec.} = 0.$$

La quale equazione ci dice, che le sole componenti delle forze proposte secondo il piano delle x, y normale all'asse della z , o secondo piani qualunque normali al detto asse, possono produrre la rotazione intorno a quest'asse, e che per l'equilibrio si richiede, che le dette componenti moltiplicate per distanze Π, Π', Π'' ec. dall'asse diano una somma zero: ossia, che la somma dei momenti delle dette forze sia uguale a zero. Viene da ciò questo teorema di geometria. Se nello spazio si suppongano tante rette, che rappresentino forze collegate in equilibrio, condotte ai loro estremi dall'origine delle coordinate rettangolari raggi vettori, proiettati i triangoli che ne sorgono sopra i tre piani coordinati, si annulla ciascuna somma sopra ciascun piano, in ciò supponendo positive le proiezioni appartenenti alle forze rotanti in un senso, e negative le relative alle forze rotanti in senso contrario.

294. Si danno le variazioni delle coordinate in rotazioni minime del sistema intorno agli assi coordinati. Si riprendano l'equazioni

$$x = r \cos.\varphi, y = r \text{ sen.}\varphi; x' = r' \cos.\varphi', y' = r' \text{ sen.}\varphi' \text{ ec.}$$

e si differenzino come nel caso (§. 293.) onde sorga una variazione comune $d\varphi$, avremo, che

$$\begin{aligned} dx &= -y d\varphi, dy = x d\varphi; \\ dx' &= -y' d\varphi, dy' = x' d\varphi. \end{aligned}$$

.

saranno le variazioni di $y, z; y', z'$ ec. dovute alla rotazione infinitesima $d\varphi$ intorno all'asse delle z . Cambiando nei risultamenti antecedenti,

$$x, y, x', y', \text{ ec. in } y, z, y', z' \text{ ec, e } d\varphi \text{ in } d\psi,$$

avremo per la rotazione minima intorno all'asse delle x

$$dy = -x d\psi, dz = y d\psi; dy' = -x' d\psi, dz' = y' d\psi \text{ ec.}$$

Cambiando in queste ultime equazioni

$$y, z, y', z' \text{ ec. in } x, x; z', x' \text{ ec. e } d\psi \text{ in } d\omega$$

si avranno per le variazioni delle coordinate provenienti dalla rotazione minima intorno l'asse delle y

$$dz = -x d\omega, dx = z d\omega;$$

$$dz' = -x' d\omega, dx' = z' d\omega \text{ ec.}$$

295. Supponendo aver luogo contemporaneamente le tre rotazioni intorno ai tre assi, avremo per le totali variazioni delle coordinate

$$dx = z d\omega - y d\varphi, dy = x d\varphi - z d\psi, dz = y d\psi - x d\omega$$

$$dx' = z' d\omega - y' d\varphi, dy' = x' d\varphi - z' d\psi, dz' = y' d\psi - x' d\omega.$$

296. **Si dimostra, che qualunque rotazione minima intorno ad un punto equivale a tre rotazioni minime intorno agli assi coordinati.** Per vederlo si supponga, che il punto intorno a cui si fa la rotazione sia preso per origine delle coordinate rettangole x, y, z ; che per questo punto ed uno del sistema passi una retta; e che per questa e per un altro punto del detto sistema passi un piano. Sia la detta retta l'asse delle x' , e la retta nell'origine a questa normale nel detto piano sia l'asse delle y' , e l'asse condotto dalla stabilita origine normale al piano delle x', y' sia l'asse delle z' . Riferendo i punti del sistema agli assi delle x, y, z , ed agli assi delle x', y', z' aventi la stessa origine è evidente, che le coordinate x, y, z varieranno col moto minimo del sistema intorno all'origine, ma saranno invariabili le coordinate x', y', z' degli stessi punti, perchè con questi punti fanno corpo quelle coordinate. Avremo poi dalla geometria analitica l'equazioni di relazione fra le due specie di coordinate

$$\begin{aligned}
 (a) \quad & x = \alpha x' + \beta y' + \gamma z' \\
 & y = \alpha' x' + \beta' y' + \gamma' z' \\
 & z = \alpha'' x' + \beta'' y' + \gamma'' z'.
 \end{aligned}$$

Le lettere greche esprimono le posizioni degli assi fra loro: in guisa che pel moto minimo del sistema esse varieranno.

297. Poichè per uno stesso punto dovrà essere

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2$$

delle equazioni (a) facendone i quadrati e sommandole ricaveremo l'equazioni

$$\begin{aligned}
 (b) \quad & \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 1, \quad \beta^2 + \beta'^2 + \beta''^2 = 1 \\
 & \gamma^2 + \gamma'^2 + \gamma''^2 = 1, \quad \alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' = 0 \\
 & \alpha\gamma + \alpha'\gamma' + \alpha''\gamma'' = 0, \quad \beta\gamma + \beta'\gamma' + \beta''\gamma'' = 0.
 \end{aligned}$$

Per queste equazioni delle nove quantità α, β ec. α', β' ec. non rimarranno che tre indeterminate. Quando x, y, z coincidono con x', y', z' dalle (a) ricaveremo

$$\begin{aligned}
 \alpha = 1, \quad \beta = 0, \quad \gamma = 0; \quad \alpha' = 0, \quad \beta' = 1, \quad \gamma' = 0; \\
 \alpha'' = 0, \quad \beta'' = 0, \quad \gamma'' = 1.
 \end{aligned}$$

Dopo ciò se si differenzino l'equazioni (a) relativamente alle x, y, z , ed alle quantità espresse con lettere greche, ed in esse si supponga $x = x', y = y', z = z'$ avremo il traslocamento minimo del sistema; dove non supponendosi variabile la posizione dell'origine delle coordinate, sarà traslocamento di rotazione. Colla coincidenza poi degli assi abbiamo assoluta la variazione delle coordinate. Eseguendo tutto ciò otterremo

$$(c) \quad \left\{ \begin{aligned} dx &= xdx + yd\beta + z d\gamma \\ dy &= x d\alpha' + y d\beta' + z d\gamma' \\ dz &= x d\alpha'' + y d\beta'' + z d\gamma''. \end{aligned} \right.$$

Ma le sei equazioni (b) di condizione differenziate danno, col porvi la condizione $\alpha = 1$, $\beta = 0$, $\gamma = 0$ ec. della coincidenza degli assi,

$$d\alpha = 0, d\beta' = 0, d\gamma'' = 0; d\beta + d\alpha' = 0,$$

$$d\gamma + d\alpha'' = 0, d\gamma' + d\beta'' = 0$$

dalle quali

$$d\alpha' = -d\beta, d\alpha'' = -d\gamma, d\beta'' = -d\gamma'.$$

Si sostituiscono questi valori nelle equazioni (c), ed avremo

$$dx = -y d\alpha' + x d\gamma, dy = x d\alpha' - y d\beta'',$$

$$dz = -x d\gamma + y d\beta''.$$

Ora queste coincidono colle equazioni del (295) se si faccia

$$d\alpha' = d\varphi, d\gamma = d\omega, d\beta'' = d\psi$$

dunque qualunque rotazione minima di un sistema di forze intorno ad un punto equivale a tre rotazioni intorno a tre assi ortogonali. Da ciò viene, che l'equilibrio di rotazione di un sistema qualunque si esprime coll'equilibrio di tre rotazioni componenti intorno ai tre assi, e che l'equazioni esprimenti nulle queste rotazioni si avranno dalla formola generale dell'equilibrio ponendovi in luogo delle variazioni infinitesime delle coordinate i loro valori del (§. 295).

298. Equazioni di condizione per l'equilibrio di rotazione d'un sistema qualunque. Abbiamo

$$dp = \frac{(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz}{p}$$

$$dp' = \frac{(x'-a')dx' + (y'-b')dy' + (z'-c')dz'}{p'}$$

.

Sostituendo in questi i valori del (§. 295) avremo

$$dp = \frac{(ay-bx)d\varphi + (bz-cy)d\psi + (cx-az)d\omega}{p}$$

$$dp' = \frac{(a'y' - b'x')d\varphi + (b'z' - c'y')d\psi + (c'x' - a'z')d\omega}{p'}$$

* * * * *

Ponendo questi valori nell'equazione generale (§. 288.) si ridurrà alla forma

$$Ld\psi + Md\omega + Ndp = 0,$$

dalla quale, per l'indeterminazione dei differenziali, avremo

$$L = 0, M = 0, N = 0$$

ossia

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} P \left(\frac{bz - cy}{p} \right) + P' \left(\frac{b'z' - c'y'}{p'} \right) \text{ ec.} = 0 \\ P \left(\frac{cx - az}{p} \right) + P' \left(\frac{c'x' - a'z'}{p'} \right) \text{ ec.} = 0 \\ P \left(\frac{ay - bx}{p} \right) + P' \left(\frac{a'y' - b'x'}{p'} \right) \text{ ec.} = 0 \end{array} \right.$$

ora abbiamo

$$\frac{x-a}{p} = \cos.\alpha, \frac{y-b}{p} = \cos.\beta, \frac{z-c}{p} = \cos.\gamma;$$

quindi

$$a = x - p \cos.\alpha, b = y - p \cos.\beta, c = z - p \cos.\gamma,$$

e così degli altri accentati. Ponendo questi valori nelle equazioni (d) avremo

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} P(y \cos.\gamma - z \cos.\beta) + P'(y' \cos.\gamma' - z' \cos.\beta') \text{ ec.} = 0 \\ P(z \cos.\alpha - x \cos.\gamma) + P'(z' \cos.\alpha' - x' \cos.\gamma') \text{ ec.} = 0 \\ P(x \cos.\beta - y \cos.\alpha) + P'(x' \cos.\beta' - y' \cos.\alpha') \text{ ec.} = 0 \end{array} \right.$$

La prima delle quali mi dà nulla la rotazione intorno all'asse delle x , la seconda nulla la rotazione intorno all'asse

delle y , la terza nulla la rotazione intorno all'asse delle z . Si vede chiaro, che la prima ci esprime nulla la somma dei momenti delle componenti delle forze sul piano delle y , z rispetto l'asse delle x , e così delle altre due equazioni.

299. Condizione algebrica perchè un sistema di punti disposti con contiguità geometrica sia invariabile. Supponiamo, che x , y , z sieno le coordinate di un punto; quelle d'un altro contiguo saranno

$$x + dx, y + dy, z + dz.$$

Se in questo invece di x , y , z si ponga

$$x + dx, y + dy, z + dz,$$

saranno

$$x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z$$

le coordinate di un terzo punto contiguo al secondo; e se in queste si porrà similmente

$$x + dx, y + dy, z + dz$$

invece di x , y , z saranno

$$x + 3dx + 3d^2x + d^3x,$$

$$y + 3dy + 3d^2y + d^3y, z + 3dz + 3d^2z + d^3z$$

le coordinate di un quarto punto contiguo al terzo. Facendo le somme dei quadrati delle differenze delle coordinate del secondo, e del primo punto; del terzo, e del primo; del quarto e del primo, avremo che i risultamenti

$$\begin{aligned} & \{ dx^2 + dy^2 + dz^2; (2dx + d^2x)^2 + \\ (m) \quad & \left\{ \begin{aligned} & (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2; (3dx + 3d^2x + d^3x)^2 + \\ & (3dy + 3d^2y + d^3y)^2 + (3dz + 3d^2z + d^3z)^2 \text{ ec.} \end{aligned} \right. \end{aligned}$$

ci daranno i quadrati delle distanze dal primo punto qualunque, del secondo, del terzo, del quarto e così degli altri. Si supponga per brevità

$$(n) \left\{ \begin{array}{l} dx^2 + dy^2 + dz^2 = \alpha \\ d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 = \beta \\ d^3x^2 + d^3y^2 + d^3z^2 = \gamma \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

e le quantità (*m*) diventeranno

$$(r) \left\{ \begin{array}{l} \alpha, 4\alpha + 2d\alpha + \beta, 9\alpha + 9d\alpha + 9\beta + \\ 3(d^2\alpha - 2\beta) + 3d\beta + \gamma, \text{ ec.} \end{array} \right.$$

Egli è evidente, che la condizione dell'invariabilità del sistema consiste nel mandare a zero le variazioni delle quantità (*r*), che sono i quadrati delle distanze dei punti da uno qualunque. Poichè però nella (*r*) si trova già un differenziale, che si ha dal passare da punto a punto del sistema, e nel nostro caso dobbiamo avere il traslocamento infinitesimo dei punti, ossia il passaggio minimo dei punti da punto a punto dello spazio, per dir nullo questo traslocamento a causa dell'invariabilità del sistema bisognerà con lettera diversa esprimere questa seconda variazione, perchè la prima è di passaggio geometrico da punto a punto del sistema, che dipende dalla sua configurazione geometrica, mentre l'altra è di passaggio con moto da luogo a luogo nello spazio. Per questa variazione assumeremo il δ nel differenziare. Dopo ciò l'invariabilità del sistema sarà espresso dalle equazioni

$$(s) \left\{ \begin{array}{l} \delta\alpha = 0, 4\delta\alpha + 2\delta d\alpha + \delta\beta = 0 \\ 9\delta\alpha + 9\delta d\alpha + 3\delta\beta + 3\delta d^2\alpha + 3\delta d\beta + \delta\gamma = 0 \\ \dots \dots \dots \end{array} \right.$$

I differenziali per *d*, e δ non avendo niuna relazione fra loro si possono scambiare, ed invece di $\delta d\alpha$ e di $\delta d^2\alpha$ ec. si potrà scrivere $d\delta\alpha$, $d^2\delta\alpha$ ec.: quindi avendosi dalla prima delle equazioni (*s*) $\delta\alpha = 0$ sarà anche $d\delta\alpha = d^2\delta\alpha = 0$, e

perciò dalla seconda delle (s) ricaveremo $d\beta = 0$. Similmente essendo

$$\partial d^2\alpha = d^2\partial\alpha = 0, \quad \partial d\beta = d\partial\beta = 0,$$

dalla terza delle (s) avremo $\partial\gamma = 0$. Quindi l'invariabilità del sistema viene espresso da

$$\partial\alpha = 0, \quad \partial\beta = 0, \quad \partial\gamma = 0 \text{ ec.}$$

Se si vada alle equazioni (n) e si differenzino per ∂ , e si avverta di portare questa differenziazione immediatamente sulle variabili, avremo, che l'equazioni di condizione dell'invariabilità del sistema si riducono alle seguenti

$$(u) \left\{ \begin{array}{l} dx d\partial x + dy d\partial y + dz d\partial z = 0 \\ d^2 x d^2 \partial x + d^2 y d^2 \partial y + d^2 z d^2 \partial z = 0 \\ d^3 x d^3 \partial x + d^3 y d^3 \partial y + d^3 z d^3 \partial z = 0 \end{array} \right.$$

300. Espressioni delle variazioni delle coordinate pel moto minimo qualunque del sistema continuo invariabile. Egli è evidente, che se dalle equazioni (u) potremo ricavare i valori di ∂x , ∂y , ∂z , essendo queste variazioni per un traslocamento qualunque dei punti del sistema invariabile, saranno variazioni delle coordinate dei punti pel moto minimo di questo, simultaneo di moto progressivo, e rotatorio.

301. Ora è evidente che per sbarazzare i ∂x , ∂y , ∂z dai differenziali che si trovano nelle (u) conviene farvi le integrazioni. A questo intendimento si supponga la x variabile principale cosicchè $d^2 x = 0$, $d^3 x = 0$ ec.: allora la seconda e terza delle equazioni (u) diventeranno

$$(y) \left\{ \begin{array}{l} d^2 y d^2 \partial y + d^2 z d^2 \partial z = 0, \\ d^3 y d^3 \partial y + d^3 z d^3 \partial z = 0. \end{array} \right.$$

La prima di queste equazioni ci dà

$$d^2\partial y = -\frac{d^2z}{d^2y} d^2\partial z,$$

e differenziando

$$d^3\partial y = -\frac{d^3z}{d^2y} d^2\partial z - \left(\frac{d^3z}{d^2y} - \frac{d^2z d^2y}{d^2y^2} \right) d^2\partial z.$$

Sostituendo questo valore nella seconda delle (y) si troverà tutta divisibile per

$$d^3z - \frac{d^3y d^2z}{d^2y},$$

e si troverà, fatta la divisione,

$$d^3\partial z - \frac{d^3y}{d^2y} d^2\partial z = 0,$$

da cui si ricava integrando (1) $d^2\partial z = \partial L d^2y$, dove ∂L è la costante arbitraria. Se nell'equazione di sopra

$$d^2\partial y = -\frac{d^2z}{d^2y} d^2\partial z$$

si ponga questo valore di $d^2\partial z = \partial L d^2y$ avremo

$$(2) \quad d^2\partial y = -\partial L d^2x.$$

Integrando le due equazioni (1), (2), ed aggiungendo le costanti $\partial M dx$, $\partial N dx$ avremo

$$(3) \quad d\partial z = \partial L dy - \partial M dx, \quad (4) \quad d\partial y = -\partial L dx + \partial N dx$$

Sostituiti questi valori nella prima delle equazioni (u)

$$dx d\partial x + dy d\partial y + dx d\partial z = 0$$

troveremo

$$(5) \quad d\partial x = -\partial N dy + \partial M dx$$

Integrando le (3), (4), (5), ed aggiungendo le costanti ∂l , ∂m , ∂n avremo

$$(6) \left\{ \begin{array}{l} \partial x = \partial l - y \partial N + z \partial M \\ \partial y = \partial m + x \partial N - z \partial L \\ \partial z = \partial n - x \partial M + y \partial L \end{array} \right.$$

Egli è poi facile vedere, che questi sono i soli valori che si possono ricavare dalle (u), perchè soddisfano a qualunque di esse, che può rappresentarsi da

$$d^2 x d^2 \delta x + d^2 y d^2 \delta y + d^2 z d^2 \delta z = 0$$

302. Formola generale dell'equilibrio tradotta al caso dei sistemi di punti contigui. Sia dm una molecola infinitesima del sistema, siano x, y, z le sue coordinate ortogonali, e siano X, Y, Z le forze secondo i tre assi a cui colla decomposizione, e composizione siano ridotte quelle dalle quali è animata la detta molecola. In tal caso i quantitativi delle forze, dalle quali sarà animata la molecola saranno Xdm, Ydm, Zdm . Egli è chiaro, che le velocità virtuali stimate in queste forze saranno $\delta x, \delta y, \delta z$, perchè le x, y, z vanno ai loro punti d'applicazione, e sono nella direzione delle loro rette. I differenziali sono per δ perchè sono variazioni di traslocamento, mentre nelle forze Xdm, Ydm, Zdm vi è il differenziale del solido geometrico, che si ha passando da punti a punti della massa. Dopo ciò

$$Xdm\delta x + Ydm\delta y + Zdm\delta z$$

sarà il momento di velocità virtuale della molecola dm , e l'integrale di questa quantità sarà la somma dei momenti di tutto il sistema: questo integrale dovendo essere definito si esprimerà con

$$\sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dm,$$

che deve esser zero in caso d'equilibrio pel teorema fondamentale delle velocità virtuali. Quindi avremo

$$(7) \quad \sum (X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dm = 0.$$

303. Equazioni di condizione per l'equilibrio di un sistema continuo di forze. Nella (7) si pongano i valori di ∂x , ∂y , ∂z delle equazioni (6); poichè

$$\partial l, \partial m, \partial n, \partial L, \partial M, \partial N$$

sono costanti relativamente ai differenziali per d , e perciò relativamente all'integrale, si potranno portare fuori del segno d'integrazione, e perciò avremo

$$\partial l SX dm + \partial m SY dm + \partial n SZ dm +$$

$$\partial NS (Yx - Xy) dm + \partial MS (Xz - Zx) dm +$$

$$\partial LS (Zy - Yz) dm = 0.$$

Poichè

$$\partial l, \partial m, \partial n, \partial L, \partial M, \partial N$$

sono quantità indipendenti ed indeterminate, l'equazione antecedente si dovrà verificare mandando a zero gl' integrali che le moltiplicano, e quindi avremo per le condizioni dell'equilibrio del sistema

$$SX dm = 0, SY dm = 0, SZ dm = 0$$

$$S (Yx - Xy) dm = 0, S (Xz - Zx) dm = 0,$$

$$S (Zy - Yz) dm = 0.$$

Si vede chiaro, che le prime tre esprimono la condizione dell'equilibrio del moto progressivo, e le altre tre del moto rotatorio.

CAP. XVIII.

Equazioni di condizione per un sistema di forze in equilibrio.

304. Differenziale d'una retta normale ad una superficie qualunque. Supponiamo una superficie qualunque di equazione differenziale

$$(a) \quad A dx + B dy + C dz = 0,$$

e supponiamo, che a questa debba essere normale la forza P , e perciò anche la retta p , (§. 288). Nel moto minimo del sistema il punto d'applicazione di questa forza sulla superficie dovrà rimanere su d'essa, e perciò il detto punto d'applicazione dovrà percorrere le lineole infinitesime s che partono da questo punto e che si trovano sulla detta superficie: ma a queste deve esser normale la P , o la p : dunque la velocità virtuale del punto d'applicazione di P deve essere ad essa normale: perciò la velocità virtuale dp stimata secondo essa deve esser zero: dunque $dp = 0$ è la condizione onde p sia normale alla data superficie: ossia deve essere

$$(x - a) dx + (y - b) dy + (z - c) dz = 0.$$

Dovendosi questa identificare colla (a) dovrà essere

$$\frac{A}{C} = \frac{x-a}{z-c}, \quad \frac{B}{C} = \frac{y-b}{z-c}:$$

da queste

$$x - a = \frac{A(z-c)}{C}, \quad y - b = \frac{B(z-c)}{C}.$$

Ponendo questi valori in

$$dp = \frac{(x-a)dx + (y-b)dy + (z-c)dz}{\sqrt{[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]}}$$

avremo

$$dp = \frac{A dx + B dy + C dz}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}.$$

Si supponga

$$A dx + B dy + C dz = du$$

sarà

$$A = \left(\frac{du}{dx}\right), \quad B = \left(\frac{du}{dy}\right), \quad C = \left(\frac{du}{dz}\right),$$

e quindi

$$dp = \frac{du}{\sqrt{\left(\frac{du}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 + \left(\frac{du}{dz}\right)^2}}$$

305. Equazioni di condizione. Siano ora

$$L = 0, M = 0, N = 0 \text{ ec.}$$

l'equazioni fra coordinate del sistema, che esprimano condizioni alle quali il sistema debba esser soggetto, l'equazioni differenziali di variazione delle dette coordinate saranno

$$dL = 0, dM = 0, dN = 0.$$

Eliminate con questa dall'equazione generale dell'equilibrio (§. 288.) altrettante variazioni di ordinate, le residue saranno le arbitrarie, ed in conseguenza si potranno mandare a zero i loro coefficienti, e ci forniranno così l'equazioni di condizione dell'equilibrio del sistema di forze assoggettato alle proposte condizioni.

306. Invece di eseguire la detta eliminazione si possono moltiplicare l'equazioni $dL = 0, dM = 0$ ec. per quantità indeterminate λ, μ, ν ec., e l'equazioni

$$\lambda dL = 0, \mu dM = 0, \nu dN = 0$$

aggiungerle all'equazione generale dell'equilibrio. Nell'equazione proveniente si considereranno arbitrarie le variazioni di tutte le coordinate e perciò si manderanno a zero i loro coefficienti. Dall'equazioni risultanti si dovranno eliminare gl'indeterminati moltiplicatori λ, μ, ν ec.

304. Dalle condizioni, alle quali è assoggettato il sistema si ricavano forze. Sia dL un differenziale delle coordinate $x', y', z'; x'', y'', z''$ ec. si faccia

$$dL = dL' + dL'' \text{ ec.}$$

in guisa che dL' contenga i soli differenziali di $x', y', z'; dL''$

contenga quelli di x'' , y'' , z'' , e così degli altri. Posto ciò la parte di condizione cioè $\lambda dL'$ si può esprimere con

$$\lambda \sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]}$$

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]}.$$

Questo secondo fattore essendo (§. 304) il differenziale della normale alla superficie di equazione differenziale $dL=0$, sarà la velocità virtuale stimata nella forza normale alla superficie nel punto di coordinate x' , y' , z' , e rappresentata in intensità dall'altro fattore

$$\lambda \sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]}.$$

Lo stesso si ricaverebbe dall'altra parte di condizione dL'' ec., e così da tutte le parti delle altre condizioni

$$dM = 0, dN = 0 \text{ ec.}$$

308. **Applicazione.** Sia un punto materiale animato da forze qualunque, che si riducano a tre X , Y , Z secondo tre assi, sarà

$$Xdx + Ydy + Zdz$$

la somma dei momenti delle dette forze. Sia il punto obbligato a rimanere sopra una superficie di equazione differenziale $dL=0$, in tal caso al trinomio antecedente dovrà aggiungersi λdL , onde avremo per l'equazione dell'equilibrio

$$Xdx + Ydy + Zdz + \lambda dL = 0.$$

Ponendo in questa in luogo di dL il valore

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) dx + \left(\frac{dL}{dy}\right) dy + \left(\frac{dL}{dz}\right) dz,$$

ed uguagliando a zero la somma dei coefficienti del differenziale di ciascuna ordinata avremo

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} X + \lambda \left(\frac{dL}{dx} \right) = 0 \\ Y + \lambda \left(\frac{dL}{dy} \right) = 0 \\ Z + \lambda \left(\frac{dL}{dz} \right) = 0 \end{array} \right.$$

ed in queste eliminando λ , i risultamenti

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} Y \left(\frac{dL}{dx} \right) - X \left(\frac{dL}{dy} \right) = 0 \\ Z \left(\frac{dL}{dx} \right) - X \left(\frac{dL}{dz} \right) = 0 \end{array} \right.$$

esprimeranno l'equazioni dell'equilibrio delle forze applicate al punto necessitato a rimanere sulla data superficie. Se questa è sferica avremo

$$Yx - Xy = 0, \quad Zx - Xz = 0$$

La forza normale alla superficie prodotta dalla forza proposta, o la pressione del punto sulla superficie, e per conseguenza la reazione della superficie, sarà espressa da

$$\lambda \sqrt{\left[\left(\frac{dL}{dx} \right)^2 + \left(\frac{dL}{dy} \right)^2 + \left(\frac{dL}{dz} \right)^2 \right]}$$

dove ponendo i valori di

$$\lambda \left(\frac{dL}{dx} \right), \lambda \left(\frac{dL}{dy} \right), \lambda \left(\frac{dL}{dz} \right)$$

ricavati dalle equazioni (a) avremo, che la forza di pressione del punto sulla superficie sarà

$$\sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2}:$$

questa è la risultante delle forze : dunque la condizione dell'equilibrio è, che la risultante delle forze del punto sia normale alla superficie, come è chiaro d'altronde. L'equazioni (b) di condizione si sarebbero avute subito dall'eliminare la dz fra le due equazioni

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

$$\left(\frac{dL}{dx}\right) dx + \left(\frac{dL}{dy}\right) dy + \left(\frac{dL}{dz}\right) dz = 0$$

309. Caso in cui il punto materiale è necessitato a stare sopra una linea qualunque. Siano

$$dy = p dx, \quad dz = q dx$$

l'equazioni differenziali della detta linea, cioè l'equazioni differenziali delle sue proiezioni sopra i piani delle y, x ; e delle z, x . In tal caso basta sostituire i valori di dy, dz nell'equazione

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0$$

e mandare a zero il coefficiente di dx , con che avremo

$$X + Yp + Zq = 0;$$

condizione dell' equilibrio.

CAP. XIX.

Del poligono funicolare.

310. Equazione dell'equilibrio. Sia una fune flessibile ed inestensibile. Agli estremi di questa siano applicate forze, che per ogni punto ridotte a tre secondo tre assi ortogonali, le forze in una estremità della fune siano X', Y', Z' , e le forze nell'altra estremità siano X'', Y'', Z'' ,

Z'' . Vi siano poi ad un punto interposto applicate forze ridotte alle tre X'' , Y'' , Z'' . Le coordinate del primo punto siano x' , y' , z' ; del punto intermedio siano x'' , y'' , z'' ; e dell'altro estremo siano x''' , y''' , z''' . Supponiamo, che le dette forze stirando i due capi di fune siano in equilibrio; ricaviamo dalla formola (§ 288) generale dell'equilibrio l'equazione di questo equilibrio particolare.

311. Si vede chiaro, che la condizione cui va soggetto questo sistema è, che i due capi di fune non possano né accorciarsi, né allungarsi, cioè che siano zero i loro differenziali. Se dunque si dicano f , g le lunghezze di questi capi, la detta condizione sarà espressa dalle equazioni $df=0$, $dg=0$. Quindi facendo uso dei moltiplicatori avremo l'equazione generale d'equilibrio

$$X'dx' + Y'dy' + Z'dz' + X''dx'' + Y''dy'' + Z''dz'' + \\ X'''dx''' + Y'''dy''' + Z'''dz''' + \lambda df + \mu dg = 0.$$

Si pongano in questa i differenziali di f , g ricavati dalle equazioni

$$f = \sqrt{(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2} \\ g = \sqrt{(x''' - x'')^2 + (y''' - y'')^2 + (z''' - z'')^2}.$$

e si uguaglino a zero le somme dei coefficienti del differenziale delle stesse coordinate, ed avremo le nove equazioni

$$\left. \begin{array}{l} (a) \left\{ \begin{array}{l} X' - \lambda \cdot \frac{x'' - x'}{f} = 0, \quad Y' - \lambda \cdot \frac{y'' - y'}{f} = 0 \\ Y' - \lambda \cdot \frac{z'' - z'}{f} = 0 \\ X'' + \lambda \cdot \frac{x'' - x'}{f} - \mu \cdot \frac{x''' - x''}{g} = 0 \end{array} \right. \\ (b) \left\{ \begin{array}{l} Y'' + \lambda \cdot \frac{y'' - y'}{f} - \mu \cdot \frac{y''' - y''}{g} = 0 \\ Z'' + \lambda \cdot \frac{z'' - z'}{f} - \mu \cdot \frac{z''' - z''}{g} = 0 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} X'' + \mu \cdot \frac{x''' - x''}{g} = 0 \\ Y'' + \mu \cdot \frac{y''' - y''}{g} = 0 \\ Z'' + \mu \cdot \frac{z''' - z''}{g} = 0 \end{array} \right.$$

Se si aggiungano insieme tutte queste equazioni avremo

$$(d) \left\{ \begin{array}{l} X' + X'' + X''' = 0 \\ Y' + Y'' + Y''' = 0 \\ Z' + Z'' + Z''' = 0 \end{array} \right.$$

Queste equazioni ci dicono, che non vi può essere moto progressivo nel poligono. Si aggiungano insieme l'equazioni (b) (c) avremo

$$\begin{aligned} X'' + X''' + \frac{\lambda}{f} (x'' - x') &= 0 \\ Y'' + Y''' + \frac{\lambda}{f} (y'' - y') &= 0 \\ Z'' + Z''' + \frac{\lambda}{f} (z'' - z') &= 0 \end{aligned}$$

Se fra queste a due a due si elimini λ avremo

$$\begin{aligned} Y'' + Y''' - \frac{y'' - y'}{x'' - x'} (X'' + X''') &= 0 \\ Z'' + Z''' - \frac{z'' - z'}{x'' - x'} (X'' + X''') &= 0 \end{aligned}$$

Le quali colle equazioni (d) equivalgono alle due

$$(e) \left\{ \begin{array}{l} Y' (x'' - x') = X' (y'' - y') \\ Z' (x'' - x') = X' (z'' - z') \end{array} \right.$$

Finalmente tra l'equazioni (c) si elimini la μ avremo

$$(f) \begin{cases} Y''' (x''' - x'') = X''' (y''' - y'') \\ Z''' (x''' - x'') = X''' (z''' - z'') \end{cases}$$

312. Proprietà del poligono ricavate dalle equazioni. L'equazioni (e) mi dicono, che sono nulle le rotazioni, che tendono a produrre le forze X' , Y' , Z' intorno agli assi che passino pel punto ove sono applicate le forze X'' , Y'' , Z'' ; o che è nulla la rotazione intorno questo punto. L'equazioni (f) dicono nulla la rotazione intorno allo stesso punto, che tendono a produrre X''' , Y''' , Z''' : perciò i due capi di fune che si congiungono nel punto (x'', y'', z'') non possono rotare intorno a questo punto, e quindi non si può aprire ne chiudere l'angolo fatto dai due detti capi.

310. Si ricavano dai moltiplicatori le tensioni del poligono. Nel nostro caso abbiamo

$$dL = df = \frac{(x'' - x')(dx'' - dx') + (y'' - y')(dy'' - dy') + (z'' - z')(dz'' - dz')}{f}$$

$$dM = dg = \frac{(x''' - x'')(dx''' - dx'') + (y''' - y'')(dy''' - dy'') + (z''' - z'')(dz''' - dz'')}{f}$$

dunque per riguardo al primo punto, di cui le coordinate sono x' , y' , z' avremo

$$\left(\frac{dL'}{dx'}\right) = -\frac{x'' - x'}{f}, \quad \left(\frac{dL'}{dy'}\right) = -\frac{y'' - y'}{f},$$

$$\left(\frac{dL'}{dz'}\right) = -\frac{z'' - z'}{f};$$

dunque

$$\sqrt{\left[\left(\frac{dL'}{dx'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy'}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz'}\right)^2\right]} = \frac{\sqrt{[(x'' - x')^2 + (y'' - y')^2 + (z'' - z')^2]}}{f} = 1.$$

Ora il moltiplicatore λ mi dà una forza

$$\lambda \sqrt{\left(\frac{dL'}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dL'}{dz}\right)^2}$$

normale (§ 288) ad una superficie di equazione $dL'=0$, e questa superficie è una sfera di raggio f , e di centro il punto di coordinate x'', y'', z'' , che si sono supposte costanti, dunque $-\lambda$ è una forza al punto di coordinate x', y', z' diretta secondo il capo di fune f .

Si troverà allo stesso modo, che al punto di coordinate x'', y'', z'' vi è una forza contraria $+\lambda$ pur diretta secondo f : dunque il capo di fune f è teso da due forze uguali e contrarie applicate alle sue estremità, perciò λ è la tensione di calcolo

314. Dopo ciò riflettendo sulle equazioni (a) si vede, che

$$\lambda \frac{x''-x'}{f}, \lambda \frac{y''-y'}{f}, \lambda \frac{z''-z'}{f}$$

sono le componenti della tensione secondo i tre assi: quindi facendo i quadrati delle tre equazioni (a), e sommandole si troverà $X''^2 + Y''^2 + Z''^2 = \lambda^2$, cioè la forza applicata nel punto (x', y', z') è uguale alla tensione. Lo stesso si avrà dalle equazioni (c), cioè, che la forza applicata in (x'', y'', z'') è uguale alla tensione μ . Che poi dette forze siano secondo i capi di fune f, g è chiaro, perchè altrimenti non potrebbero produrre tensioni uguali alle loro intensità.

315. L'equazioni (b) dicono che la somma delle componenti della forza applicata in (x'', y'', z'') e le componenti secondo gli stessi assi delle tensioni dei capi di fune che si uniscono nel detto punto sono parzialmente zero: dunque la forza in quel punto e le tensioni λ, μ dei due capi contigui sono in equilibrio, cioè ciascuna volta in senso contrario è la risultante delle altre due, come per es. la forza nel detto punto volta in senso contrario è la risul-

tante delle tensioni dei due capi contigui di fune. Può essere un esercizio l'estendere il caso a quattro punti d'un poligono funicolare, e si ritroveranno le stesse conseguenze testè ricavate.

CAP. XX.

Equilibrio d'un filo flessibile ed inestensibile.

316. **Equazioni d'equilibrio.** Sia

$$ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

l'elemento, o latercolo della curva di questo filo: l'invariabilità della sua lunghezza sarà espressa da $\partial ds = 0$: dunque all'equazione

$$(m) \quad S(X\partial x + Y\partial y + Z\partial z) dm = 0$$

si deve aggiungere $S\lambda\partial ds = 0$. Si prenda la variazione di ds o di

$$\sqrt{(dx^2 + dy^2 + dz^2)}$$

ed avremo

$$\partial ds = \frac{dx\partial dx + dy\partial dy + dz\partial dz}{ds}$$

quindi

$$S\lambda\partial ds = S\lambda \frac{dx}{ds} \partial dx + S\lambda \frac{dy}{ds} \partial dy + S\lambda \frac{dz}{ds} \partial dz$$

cambiando ∂d in $d\partial$, ed integrando per parti. avremo

$$(n) \quad \left\{ \begin{array}{l} S\lambda \frac{dx}{ds} \partial dx = \lambda'' \frac{dx'}{ds'} \partial x' - \lambda' \frac{dx'}{ds'} \partial x' - S d.\lambda \frac{dx}{ds} \partial x \\ S\lambda \frac{dy}{ds} \partial dy = \lambda'' \frac{dy'}{ds'} \partial y' - \lambda' \frac{dy'}{ds'} \partial y' - S d.\lambda \frac{dy}{ds} \partial y \\ S\lambda \frac{dz}{ds} \partial dz = \lambda'' \frac{dz'}{ds'} \partial z' - \lambda' \frac{dz'}{ds'} \partial z' - S d.\lambda \frac{dz}{ds} \partial z \end{array} \right.$$

dove le quantità accentate sono gl'integrali ai due estremi del filo, e riguardano qualche condizione a cui queste estremità possono essere assoggettate, come di rimanere sopra d'una curva, o d'una superficie.

317. Aggiungendq l'equazioni (n) alla (m) avremo

$$\begin{aligned} S \left[\left(Xdm - d. \frac{\lambda dx}{ds} \right) \delta x + \left(Ydm - d. \frac{\lambda dy}{ds} \right) \delta y \right. \\ \left. + \left(Zdm - d. \frac{\lambda dz}{ds} \right) \delta z \right] \\ + \frac{\lambda'' dx''}{ds''} dx'' + \frac{\lambda' dy'' \delta y''}{ds''} + \frac{\lambda'' dz'' \delta z''}{ds''} - \frac{\lambda' dx' \delta x'}{ds'} \\ - \frac{\lambda' dy' \delta y'}{ds'} - \frac{\lambda' dz' \delta z'}{ds'} = 0. \end{aligned}$$

La parte da integrarsi indeterminata deve esser da se zero, e perciò deve essere zero il suo differenziale, o la quantità sotto il segno integrale; e poichè le δx , δy , δz sono indeterminate indipendenti, saranno parzialmente zero i loro coefficienti; perciò avremo

$$(r) \left\{ \begin{aligned} Xdm - d. \frac{\lambda dx}{ds} &= 0 \\ Ydm - d. \frac{\lambda dy}{ds} &= 0 \\ Zdm - d. \frac{\lambda dz}{ds} &= 0 \end{aligned} \right.$$

Integrando l'equazioni (r) avremo

$$(s) \left\{ \begin{array}{l} \lambda \frac{dx}{ds} = A + \int X dm \\ \lambda \frac{dy}{ds} = B + \int Y dm \\ \lambda \frac{dz}{ds} = C + \int Z dm \end{array} \right.$$

Se tra queste si elimina la λ avremo

$$(o) \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy}{dx} = \frac{B + \int Y dm}{A + \int X dm} \\ \frac{dz}{dx} = \frac{C + \int Z dm}{A + \int X dm} \end{array} \right.$$

Il moltiplicatore λ come si è veduto nel poligono funicolare esprime la tensione della curva funicolare.

318. **Catenaria.** Supponiamo la curva animata da forze parallele secondo le x , che supporremo verticali dal basso in alto essendo le y orizzontali; in tal caso $Y=0$, $Z=0$, e perciò la seconda e terza delle equazioni (s) daranno

$$\lambda \frac{dy}{ds} = B, \quad \lambda \frac{dz}{ds} = C,$$

dalle quali

$$\frac{dy}{dz} = \frac{B}{C}, \quad Cy = Bz + D :$$

dunque la curva funicolare, nel nostro caso catenaria, è tale, che la sua proiezione sopra d' un piano è una retta, dunque deve essere una curva a semplice curvatura.

319. Si supponga dunque questa curva nel piano delle x, y : in tal caso essendo nella terza delle (s) $Z=0$, $z=0$ sarà identicamente nulla.

320. La seconda ci dà

$$\lambda \frac{dy}{ds} = B, \quad \text{ove } \lambda \frac{dy}{ds}$$

e la componente della tensione λ secondo le dy , o y orizzontali: dunque la tensione orizzontale nella catenaria è costante.

321. La prima delle (o) divisa per

$$\frac{\lambda dy}{ds} = B \text{ darà } \frac{dx}{dy} = \frac{A + \int X dm}{B}.$$

Se si supponga portata l'equazione al punto più basso della catenaria ove la tangente è orizzontale, e che quivi s' incomincino a calcolar le forze X , avremo in quel punto

$$\frac{dx}{dy} = 0, \quad \int X dm = 0$$

e perciò $A = 0$: dunque l'equazione della catenaria sarà $B dx = dy \int X dm$, come nel (§ 128).

CAP. XXI.

Della lamina elastica.

322. **Angolo di contingenza.** S'immagini una lamina elastica piegata a poligono da forze, l'elasticità E tenderà a diminuire l'angolo e formato da un lato col prolungamento dell'altro, con cui fa angolo. Se si dicano f, g questi due lati, ed h la retta che congiunge le loro estremità non congiunte, sarà $180 - e$ l'angolo incontro a questo lato quindi

$$h^2 = f^2 + g^2 - 2fg \cos.(180 - e), \text{ e}$$

$$-\cos.e = \frac{f^2 + g^2 - h^2}{2fg}, \text{ e } \text{sen.}^2 e = \frac{4f^2 g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2}{4f^2 g^2}$$

Se si suppone, che questo poligono elastico diventi una curva elastica e siano x, y, z le coordinate del principio del latercolo dz , saranno $x + dx, y + dy, z + dz$ le coordinate

del suo termine; o del principio del secondo latercolo. Le

$$x + 2dx + d^2x, y + 2dy + d^2y, z + 2dz + d^2z:$$

saranno le coordinate dell'altro estremo di questo secondo latercolo, dunque le differenze delle coordinate dell'estremità del primo latercolo saranno, dx, dy, dz ; e le differenze delle coordinate dell'estremità del secondo saranno

$$dx + d^2x, dy + d^2y, dz + d^2z$$

questi latercoli corrispondono ad f , e g del caso antecedente; dunque

$$\begin{aligned} f^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 = ds^2; g^2 = (dx + d^2x)^2 \\ &+ (dy + d^2y)^2 + (dz + d^2z)^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ &+ 2(dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z) + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 \\ &= ds^2 + 2ds d^2s + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2. \end{aligned}$$

323. Le differenze poi delle coordinate delle estremità di Λ saranno le differenze delle coordinate del principio del primo latercolo, e di quelle del termine del secondo: quindi avremo

$$\begin{aligned} h^2 &= (2dx + d^2x)^2 + (2dy + d^2y)^2 + (2dz + d^2z)^2 \\ &= 4ds^2 + 4ds d^2s + d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 \end{aligned}$$

dunque

$$\begin{aligned} f^2 + g^2 - h^2 &= -2ds^2 - 2ds d^2s, \text{ e} \\ 4f^2 g^2 - (f^2 + g^2 - h^2)^2 &= 4ds^4 + 8ds^3 d^2s + 4ds^2 (d^2x^2 \\ &+ d^2y^2 + d^2z^2) - 4(ds^2 + ds d^2s)^2 = \\ 4ds^2 (d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2): \end{aligned}$$

quindi trascurando gl'infinitesimi di terz'ordine avremo

$$\text{sen.}^2 e = \frac{d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2}{ds^2}.$$

Poichè questo valore di $\text{sen.}^2 e$ è un infinitesimo di secondo ordine, quello di $\text{sen.} e$ sarà un infinitesimo di prim'ordine

onde il seno si confonderà coll'arco, e potrà farsi

$$e = \frac{\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s)}}{ds}$$

L'angolo ora calcolato esteriormente fatto da un latercolo della curva col prolungamento del suo latercolo antecedente, con cui si congiunge, si dice *angolo di contingenza*.

324. Equazione della lamina curva in equilibrio. L'elasticità E tendendo a diminuire l'angolo di contingenza, il suo momento di velocità virtualo sarà $E\delta e$. Si dovrà dunque prendere la variazione del valore (§. 323.) di e . Ma si ha la condizione (§. 316.) $\delta ds = 0$ dell'invariabilità della lunghezza lamina, e perciò

$$d\delta ds = \delta d^2s = 0;$$

quindi nel prendere la variazione di e si supporranno costanti ds , e d^2s : perciò avremo

$$\delta e = \frac{d^2x\delta d^2x + d^2y\delta d^2y + d^2z\delta d^2z}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}.$$

Sostituendo questo valore in $SE\delta e$, e per abbreviare facendo

$$I = \frac{E}{ds\sqrt{(d^2x^2 + d^2y^2 + d^2z^2 - d^2s^2)}}$$

sarà

$$SE\delta e = SI d^2x\delta d^2x + SI d^2y\delta d^2y + SI d^2z\delta d^2z.$$

Si muti δd , in $d\delta$ e si faccia la successiva integrazione per parti in ciasunno di questi termini per liberare le variazioni δx , δy , δz dalle differenziazioni seconde, e si ritenga la parte sotto il segno S , esprimendo con M , N , P le altre quantità portate ai limiti, ed avremo

$$SI d^2x\delta d^2x = S d^2 (I d^2x) \delta x + M$$

$$SI d^2y\delta d^2y = S d^2 (I d^2y) \delta y + N$$

$$SI d^2z\delta d^2z = S d^2 (I d^2z) \delta z + P$$

Aggiungendo la somma di questi valori di $S\delta\epsilon$ ed anche $S\lambda\delta ds = 0$, che viene dalla condizione $\delta ds = 0$, all'equazione generale

$$S(X\delta x + Y\delta y + Z\delta z) dm = 0,$$

e mandando a zero le quantità sotto l'integrale, che sono i parziali coefficienti di δx , δy , δz avremo

$$Xdm - d \frac{\lambda dx}{ds} + d^2(1d^2x) = 0$$

$$Ydm - d \frac{\lambda dy}{ds} + d^2(1d^2y) = 0$$

$$Zdm - d \frac{\lambda dz}{ds} + d^2(1d^2z) = 0$$

Una prima integrazione ci dà

$$\lambda \frac{dx}{ds} - d(1d^2x) = A + \int Xdm$$

$$\lambda \frac{dy}{ds} - d(1d^2y) = B + \int Ydm$$

$$\lambda \frac{dz}{ds} - d(1d^2z) = C + \int Zdm$$

Si elimini λ , ed avremo

$$dx d(1d^2y) - dy d(1d^2x) = (A + \int Xdm)dy - (B + \int Ydm)dx$$

$$dx d(1d^2z) - dz d(1d^2x) = (A + \int Xdm)dz - (C + \int Zdm)dx$$

$$dy d(1d^2z) - dz d(1d^2y) = (B + \int Ydm)dz - (C + \int Zdm)dy$$

le quali integrate ci daranno

$$(1) \begin{cases} 1(dx d^2y - dy d^2x) = F + \int (A + \int Xdm)dy - \int (B + \int Ydm)dx \\ 1(dx d^2z - dz d^2x) = G + \int (A + \int Xdm)dz - \int (C + \int Zdm)dx \\ 1(dy d^2z - dz d^2y) = H + \int (B + \int Ydm)dz - \int (C + \int Zdm)dy \end{cases}$$

325. **Valore dell'elasticità.** Si stabilisce comunemente, che l'elasticità sia in ragione inversa del raggio osculatore: dicendo ρ questo raggio sarà $= \frac{K}{\rho}$, ove K è costante.

326. **Col dato valore della elasticità si trova l'equazione della lamina.** Ritornando ai nostri due lati f, g : se dai loro punti medi si alzino due normali f', g' che concorrano in un punto, qui formano l'angolo fatto dal prolungamento di f con g , perchè nel quadrilatero proveniente, come l'angolo fatto da f', g' è supplemento di quello fatto da f, g , così di questo è supplemento l'angolo fatto dal prolungamento di f con g . Si supponga ora, che questi due lati diventino infinitesimi, l'angolo fatto da f', g' sarà l'angolo di contingenza, e le due f', g' si potranno supporre uguali. Ora se con un raggio uguale ad una per es. f' si descriverà un arco di circolo questo combacierà colla curva nell'arco formato dai due latercoli infinitesimi f, g , che nel caso nostro sono ognuno ds , e perciò combacierà coll'arco interposto fra f' , e g' cioè coll'arco $ds = \frac{1}{2}(ds + ds)$: dunque essendosi detto ρ il raggio osculatore avremo

$$\rho e = ds, \text{ e } \rho = \frac{ds}{e};$$

dunque

$$E = \frac{Ke}{ds}; \text{ ma era (§. 323, 324.) } I = \frac{E}{eds^2};$$

dunque $I = \frac{K}{ds^3}$ e perciò costante, supponendo ds costante.

327. **Lamina curva da forze alle estremità.** Il caso più semplice ed il più ordinario è quello in cui le forze X, Y, Z continuate nella lamina sono nulle, e che la curvatura della lamina venga solamente da forze applicate alla di lei estremità. In tal caso nell'equazione (1) (§. 324) spariranno la quantità $\int X dm, \int Y dm, \int Z dm$, e ponendovi $\frac{K}{ds^3}$ in luogo di I avremo

$$(2) \left\{ \begin{array}{l} K \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{ds^3} = F + Ay - Bx \\ K \frac{dx d^2 z - dz d^2 x}{ds^3} = G + Az - Cx \\ K \frac{dy d^2 z - dz d^2 y}{ds^3} = H + Bz - Cy \end{array} \right.$$

nelle quali A, B, C essendo i valori degli

$$\int X dm, \int Y dm, \int Z dm$$

alle estremità della lamina saranno le forze in questi punti secondo le x, y, z .

328. **Caso della lamina a semplice curvatura.** Supponiamo, che la lamina sia a semplice curvatura, e che sia nel piano delle x, y , essendo le x verticali, e le y orizzontali. In tal caso delle tre (2) rimarrà la prima

$$K \frac{dx d^2 y - dy d^2 x}{ds^3} = F + Ay - Bx.$$

Se si confronti il moltiplicatore di K col valore del raggio osculatore dato nel (§. 195), si vede essere

$$-\frac{1}{R} : \text{dunque (3)} \quad \frac{K}{R} = F - Ay - Bx :$$

dove non si badi ai segni, essendo F, A, B indeterminate. Per determinare la F si porti l'equazione (3) al termine della lamina ove sia $x = a, y = b$. In questo punto la curvatura è nulla, perchè la forza ivi applicata non ha momento: dunque in questo R è enormemente grande, e perciò si può fare $\frac{K}{R} = 0$. Fatte queste sostituzioni in (3) sarà

$$0 = F - Ab - Ba$$

Sottraendo questa dalla (3) sarà

$$\frac{K}{R} = B(a - x) + A(b - y)$$

dove A è la forza verticale, e B la orizzontale, ed

$$(4) \quad R = \frac{ds^3}{dyd^2x - dx d^2y}.$$

329. Se si supponga, che la lamina sia curvata dal solo peso verticale. A , avremo

$$(5) \quad \frac{K}{R} = (b - y).$$

Da questa si ricava, che il raggio osculatore in ogni punto della curva è inversamente proporzionale alla distanza orizzontale di questo punto dall'estremità inferiore della curva. La stessa equazione verifica ciò che si è detto al termine del paragrafo (150).

330. Abbiamo supposto la ds costante: per farlo risentire al valore (4) di R si prenda l'equazione

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

e si differenzi in questa ipotesi, avremo

$$dx d^2x + dy d^2y = 0, \text{ e } d^2y = -\frac{dx d^2x}{dy}.$$

Sostituito questo valore in (4) avremo

$$R = \frac{ds dy}{d^2x}.$$

Si sostituisca questo valore in (5), ed avremo

$$(6) \quad K d^2x = A(b - y) ds dy$$

equazione differenziale della lamina elastica. Per integrare l'equazione avuta si supponga piccolissima l'inflessione della lamina: potrà farsi $ds = dy$, con che come la ds è costante

così lo sarà la dy . In questa ipotesi l'equazione (6) diventerà

$$(7) \quad Kd. \frac{dx}{dy} = A(b - y) dy.$$

La $\frac{dx}{dy}$ è la tangente trigonometrica dell'angolo, che la tangente ad un punto della curva fa coll'orizzontale. Al vertice della curva la tangente è orizzontale, dunque in questo punto $y = 0$. $\frac{dx}{dy} = 0$. Integrata l'equazione (7) e determinata la costante in questa ipotesi avremo

$$K \frac{dx}{dy} = Aby - \frac{1}{2} Ay^2,$$

che integrata di nuovo ci dà

$$6Kx = 3Aby^2 - Ay^3.$$

331. **S'immagini una lamina fermata in una estremità sul suolo, e curvata dal peso A secondo l'asse delle x verticali all'altra estremità: l'equazione**

(3) ci darà (8) $\frac{K}{R} = Ay$, perchè la F è zero a causa, che nel vertice della curva y è zero, e l'elasticità della curva $\frac{K}{R}$ è nulla secondo ciò che si è detto (§. 328). L'equazione (8) verifica ciò che si disse nel (§. 166.) Nell'espressione di

$$R = \frac{ds^3}{dyd^2x - dx d^2y}$$

si sostituisca il valore di d^2x ricavato dalla equazione (§. 330.) $dx d^2x + dy d^2y = 0$, e troveremo

$$R = - \frac{ds dx}{d^2y}.$$

Si sostituisca questo in (8) avremo

$$Kd^2y = - Aydsdx.$$

Supponendo l'inflessione piccolissima potrà farsi $dx = ds$, e l'equazione antecedente diventerà

$$\frac{Kd^2y}{dx^2} = - Ay,$$

Sia $y = f$ il ventre massimo della lamina, in questo punto $\frac{dy}{dx}$, tangente dell'angolo, che la tangente alla curva fa coll'asse della x , è nullo. Dopo ciò si moltiplichi l'antecedente equazione per $2dy$, e s'integri e si determini la costante dal porre $y = f$, $\frac{dy}{dx} = 0$, ed avremo

$$\frac{Kdy^2}{dx^2} = A (f^2 - y^2).$$

Integrando come nel (§. 166.) avremo

$$(a) \quad y = f \operatorname{sen}.x \sqrt{\frac{A}{K}}.$$

332. Posto $x = a$, cioè all'intero asse della curva, deve tornare $y = 0$: sarà dunque

$$f \operatorname{sen}.a \sqrt{\frac{A}{K}} = 0, \text{ onde } a \sqrt{\frac{A}{K}} = \operatorname{arc}. \operatorname{sen}. = 0 = \pi;$$

$$\text{ed} \quad A = \frac{K\pi^2}{a^2}.$$

Questo dunque è il valore del peso A , affinché possa produrre nella lastra una inflessione piccolissima.

333. Se sarà $A < \frac{K\pi^2}{a^2}$ non potrà soddisfarsi alla equazione $f \operatorname{sen}.a \sqrt{\frac{A}{K}} = 0$ se non col fare $f=0$: quindi verrebbe $y = 0$, cioè la lastra affatto non si piegherà.

334. Se sia $A > \frac{K\pi^2}{a^2}$ l'equazione $f_{sen.a} \sqrt{\frac{A}{K}} = 0$ ci condurrebbe alla stessa conseguenza, e mostrerebbe che la lastra non può piegarsi. Ma questa conseguenza è falsa essendo evidente, che la lastra una volta incurvata, per un carico maggiore non può che incurvarsi di più. Quindi convien dire piuttosto, che allora l'inflessione non essendo più piccolissima l'equazione

$$y = f_{sen.x} \sqrt{\frac{A}{K}}$$

non è più atta a rappresentare la figura della lastra incurvata.

335. Posto $A = \frac{K\pi^2}{a^2}$ nella (a) l'ordinata $y = f$ risponde all'ascissa $x = \frac{a}{2}$: dal che si vede, che il ventre massimo cade alla metà dell'altezza dell'asse.

CAP. XXII.

*Formole generali per determinare i centri
di gravità delle figure.*

336. Una figura qualunque sia linea, sia superficie, o solido si dice posta simmetricamente rispetto un asse, od un piano, quando ad un elemento della figura da una parte dell'asse o del piano ne corrisponde un altro uguale, ed alla stessa distanza dell'altra parte dell'asse, o del piano. In tal caso ad ogni momento da una parte gli corrisponderà un altro uguale e di segno contrario dall'altra.

337. Il centro di gravità d'una figura posta simmetricamente rispetto un asse o un piano si trova sull'asse, o sul piano. Prendendo infatti l'asse, e si dica lo stesso del piano,

come asse de' momenti sarà l'ordinata del centro di gravità della figura uguale (din. §. 34, 37), alla differenza dei momenti dei suoi elementi divisa per la somma degli elementi stessi. Ora nel caso nostro la detta differenza è zero, perchè ogni momento positivo ne ha un'altro uguale e negativo (§. 336): dunque sarà nulla la detta differenza, cioè nulla l'ordinata, o la distanza del centro di gravità dall'asse.

338. Dopo ciò diamo le formole generali per calcolare le coordinate del centro di gravità delle diverse figure cioè delle linee, delle superficie, e dei solidi, con applicazioni. A ciò ci serviremo delle formole date (din. §. 40).

339. **Centro di gravità d'una linea qualunque.** Sia s la porzione d'una linea qualunque riferita a tre assi ortogonali, e siano x, y, z le coordinate della sua estremità variabile. I momenti del di lei elemento ds relativamente ai tre piani delle $y, z; x, z; x, y$ saranno $x ds, y ds, z ds$: quindi esprimendo con X, Y, Z le coordinate del centro di gravità avremo.

$$X = \frac{\int x ds}{s}, \quad Y = \frac{\int y ds}{s}, \quad Z = \frac{\int z ds}{s}.$$

340. **Applicazione.** Sia un elice (sta. §. 68.) sopra un cilindro verticale di raggio a . Sia l'origine delle coordinate al centro del circolo della base di questo cilindro, su di questo siano gli assi delle x, y , e l'asse del cilindro sia l'asse z . In primo luogo avremo l'equazione $x^2 + y^2 = a^2$. L'arco s dell'elice cominci ove l'asse delle x sega la circonferenza della base. La sua proiezione sul piano della base del cilindro è un arco di circolo, che ha per coseno x , e la verticale, che congiunge l'estremo di questo arco coll'estremo di s è la z di questo estremo. Sviluppando dal cilindro, e rendendo in un piano i due detti archi di circolo, e di elice, e la z , avremo un triangolo rettangolo d'ipotenusa l'arco s dell'elice, di cateto l'arco di coseno x , che può esprimersi con

$$a \cdot \text{arc.cos.} \left(= \frac{x}{a} \right),$$

e che ha z per altro cateto: dunque il z è uguale all'altro cateto moltiplicato per la tangente dell'angolo d'inclinazione dell'elice al circolo della base; questo angolo è costante, dicendosi dunque b la sua tangente sarà

$$z = b a \cdot \text{arc.cos.} \left(= \frac{x}{a} \right),$$

o semplicemente

$$z = b \text{arc.cos.} \left(= \frac{x}{a} \right).$$

L'arco s sarà la sua proiezione

$$a \text{ arc.cos.} \left(= \frac{x}{a} \right)$$

divisa pel coseno dell'angolo costante, che fa con questa: dunque

$$s = m \cdot \text{arc.cos.} \left(= \frac{x}{a} \right).$$

Avremo dunque per l'equazioni dell'elice

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad z = b \cdot \text{arc.cos.} \left(= \frac{x}{a} \right).$$

ed inoltre

$$s = m \cdot \text{arc.cos.} \left(= \frac{x}{a} \right)$$

da questa e dall'antecedente abbiamo $mz = bs$ (1). Dopo ciò

$$\int x ds = \int - \frac{m x dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = m \sqrt{a^2 - x^2};$$

dunque

$$X = \frac{\int x ds}{s} = \frac{m \sqrt{a^2 - x^2}}{s};$$

ossia ponendovi il valore di s ricavato dalla (1), $X = \frac{by}{x}$.

Inoltre

$$\int y ds = \int \sqrt{(a^2 - x^2)} \cdot \frac{-mdx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \int -mdx.$$

Si porti l'integrale al principio dell'elice, in questo punto $x = a$, e la somma dei momenti è zero: dunque

$$\int_a^x -mdx = m(a - x)$$

dopo ciò

$$Y = \frac{\int y ds}{s} = \frac{m(a - x)}{s} = \frac{b(a - x)}{s}.$$

Finalmente

$$\int x ds = \frac{m}{b} \int x dz,$$

e ciò ponendovi il valore di ds ricavato dalla (1): dunque

$$\begin{aligned} \int x ds &= \frac{mx^2}{2b}, \text{ e } Z = \frac{\int x ds}{s} \\ &= \frac{mx^2}{2b} : \frac{mx^2}{b} = \frac{z}{2}. \end{aligned}$$

341. **Linea a semplice curvatura.** In questo caso abbiamo le coordinate del centro di gravità

$$X = \frac{\int x ds}{s}, \quad Y = \frac{\int y ds}{s}.$$

342. **Applicazione.** Si consideri una cicloide col vertice in alto, e limitata al di sotto da una retta uguale alla sua circonferenza. L'asse di questa curva è il diametro del circolo generatore, e dal suo vertice siano computate le ascisse x . Se $2r$ è il diametro del circolo generatore, abbiamo per l'equazione differenziale della cicloide

$$dj = dx \sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)}.$$

Facilmente si troverà

$$ds = \sqrt{2r} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}, \text{ ed } s = 2\sqrt{2rx};$$

dopo ciò avremo

$$X = \frac{\int x ds}{s} = \sqrt{2r} \int dx \sqrt{x} : 2\sqrt{2rx} = \frac{1}{3} x.$$

Inoltre

$$\begin{aligned} \int y ds &= ys - \int s dy = 2y\sqrt{2rx} \\ &- 2\sqrt{2r} \int dx \sqrt{(2r-x)} = 2y\sqrt{2rx} \\ &+ \frac{4}{3} \sqrt{2r}(2r-x)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

Portando l'integrale al principio ove $x=0$, e $\int y ds=0$ avremo

$$C = -\frac{16r^2}{3} \text{ dunque}$$

$$Y = \left(2y\sqrt{2rx} + \frac{4}{3} \sqrt{2r}(2r-x)^{3/2} - \frac{16r^2}{3} \right) : 2\sqrt{2rx}.$$

343. Estendendo l'integrale a tutta la cicloide sarà $y=\pi r$, ove π è circonferenza di diametro uno, ed $x=2r$, e quindi

$$X = \frac{2r}{3}, Y = \frac{r}{3} (3\pi - 4).$$

344. **Formola per trovare il centro di gravità delle linee poste simmetricamente rispetto l'asse delle ascisse.** Sia una linea qualunque a semplice curvatura posta simmetricamente rispetto un asse, e sia quello delle ascisse. Ad un punto di coordinate x, y corrisponda il termine di un arco s , che comincia dall'origine delle ascisse.

Se si supponga l'elemento seguente ds , ve ne sarà dall'altra parte un altro ds ; quindi il $2ds$ si potrà collocare in dx centro di gravità dei due detti elementi. Prendendo l'origine delle ascisse pel centro dei momenti, il momento di $2ds$ sarà $2xds$, e la somma dei momenti $2\int xds$: divisa questa per la somma degli elementi, cioè per $2\int ds$, o $2s$ avremo, che la distanza del centro di gravità della curva $2s$ collocato nell'asse delle x dalla loro origine sarà

$$(1) \quad X = \frac{2\int xds}{2s} = \frac{\int xds}{s}.$$

345. Si vede chiaro, che si sarebbe avuta la stessa coordinata X del centro di gravità se si fosse considerata mezza curva s , o la curva posta da una parte dell'asse delle ascisse.

346. **Applicazioni.** Sia da determinarsi il centro di gravità della catenaria omogenea. Abbiamo (§. 135.)

$$s = \sqrt{x^2 + 2ax};$$

quindi

$$\int xds = \int \frac{x^2 dx + ax dx}{\sqrt{x^2 + 2ax}}.$$

Si ponga $x = u - a$ questa diventerà

$$\int \frac{u^2 du - a u du}{\sqrt{(u^2 - a^2)}}.$$

Procedendo all'integrazione sarà

$$\begin{aligned} \int \frac{u^2 du}{\sqrt{(u^2 - a^2)}} &= u\sqrt{(u^2 - a^2)} - \int du\sqrt{(u^2 - a^2)} \\ &= u\sqrt{(u^2 - a^2)} - \int \frac{u^2 du}{\sqrt{(u^2 - a^2)}} + a^2 \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 - a^2)}}, \quad \text{ed} \\ \int \frac{u^2 du}{\sqrt{(u^2 - a^2)}} &= \frac{1}{2} u\sqrt{(u^2 - a^2)} + \frac{a^2}{2} \int \frac{du}{\sqrt{(u^2 - a^2)}}. \end{aligned}$$

Si trovi questo integrale togliendo l'irrazionalità, e si completi tutta l'operazione per avere l'ascissa X del centro di gravità della catenaria.

347. Sia da determinarsi il centro di gravità di un arco di circolo diviso in mezzo dal raggio preso come asse delle ascisse computate dal centro. In tal caso

$$y^2 = r^2 - x^2, \quad ds = \sqrt{(dx^2 + dy^2)} = \frac{-r dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}} :$$

dove nell'estrazione della radice si è scelto il segno negativo, perchè nel nostro caso al crescere dell'arco decresce l'ascissa. Dopo ciò avremo

$$X = \frac{\int x ds}{s} = r \frac{\int \frac{-x dx}{\sqrt{(r^2 - x^2)}}}{s} = \frac{r \sqrt{(r^2 - x^2)}}{s}.$$

Se si dica che la corda dell'arco $2s$, avremo

$$X = \frac{rc}{2s} :$$

cioè la distanza del centro di gravità dell'arco di circolo proposto dal centro è uguale al raggio moltiplicato nella corda diviso per l'arco.

348. **Formola generale del centro di gravità di un'area piana posta simmetricamente rispetto l'asse delle ascisse.** Si suppongano le coordinate rettangolari; e ad una ascissa x corrisponda una doppia ordinata $2y$: conducendone un'altra infinitamente prossima avremo un rettangolo di base $2y$, e di altezza dx : l'area di questo rettangolo sarà $2y dx$, e la somma degli elementi sarà $2 \int y dx$. Il centro di gravità di $2y dx$ si trova in dx : dunque ricentrandovi il $2y dx$, il suo momento rispetto l'origine delle ascisse sarà $2y x dx$, e la somma dei momenti sarà $2 \int y x dx$, e perciò

$$X = \frac{\int y x dx}{\int y dx}$$

sarà la formola domandata.

349. **Diamo la stessa in coordinate polari.** Si supponga lo stesso asse delle ascisse, e dall'origine come polo spicchi un raggio r ad un punto qualunque della superficie, che faccia l'angolo θ coll'asse delle ascisse. Si consideri un altro raggio r infinitamente prossimo, che col primo farà l'angolo $d\theta$, dunque $r d\theta$ sarà l'arco di raggio r interposto fra i due detti raggi, ed $\frac{1}{2} r^2 d\theta$ sarà l'area del settore infinitesimo fatto dai due stessi raggi. Cresca la r di dr , e si ponga $r+dr$ invece di r in $\frac{1}{2} r^2 d\theta$, sarà $\frac{1}{2} (r+dr)^2 d\theta$ il detto settore aumentato di una quantità infinitesima: dunque

$$\frac{1}{2} (r+dr)^2 d\theta - \frac{1}{2} r^2 d\theta$$

sarà questo aumento. Facendo lo sviluppo, la sottrazione, e trascurando l'infinitesimo di terz' ordine $dr^3 d\theta$, avremo $r dr d\theta$, che sarà il detto aumento, o l'elemento di un'area dato in coordinate polari. La distanza di questo elemento dall'asse delle y è $r \cos \theta$, dunque il momento del detto elemento rispetto quest'asse sarà $r^2 dr \cos \theta d\theta$, dunque la distanza del centro di gravità dell'area posta simmetricamente rispetto l'asse delle ascisse dall'origine di queste data in coordinate polari sarà

$$X = \frac{\int \int r^2 dr \cos \theta d\theta}{\int \int r dr d\theta}$$

Si è trovata questa formola supponendo una mezza area della proposta, perchè (§. 345.) è la stessa per l'area doppia.

350. **Applicazioni.** Si debba determinare il centro di gravità di un segmento di circolo. Essendo a il raggio, e la ascisse computate dal centro avremo

$$(1) \quad X = \frac{\int x \sqrt{(a^2 - x^2)} dx}{\int \sqrt{(a^2 - x^2)} dx}.$$

I limiti di questi integrali sono la corda ed il vertice dell'arco del segmento. Sia α l'angolo, che i raggi condotti alle due estremità del detto segmento fanno coll'asse delle x : ed allora il limite inferiore sarà $x = a \cos. \alpha$ ed il superiore $x = a$. Ora

$$\int x dx \sqrt{(a^2 - x^2)} = -\frac{1}{3} (a^2 - x^2)^{3/2} :$$

nel limite inferiore abbiamo $-\frac{1}{3} a^3 \text{sen.}^3 \alpha$, ed al limite superiore abbiamo zero: sottraendo da questo l'antecedente avremo, che l'integrale fra i limiti del numeratore di (1) sarà

$$\frac{1}{3} a^3 \text{sen.}^3 \alpha.$$

Per integrare per parti $\sqrt{(a^2 - x^2)} dx$, e non cadere in una equazione identica, si moltiplichi e si divida per $\sqrt{(a^2 - x^2)}$ avremo

$$(2) \quad \int \sqrt{(a^2 - x^2)} dx = a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}.$$

L'integrale di $\frac{dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}}$ dividendo sopra sotto per a è

$$\text{arc. sen.} \left(\frac{x}{a} \right).$$

Si porti questo al limite inferiore avremo $\text{arc. sen.} (= \cos. \alpha)$: dunque quest'arco è complemento di α : sarà dunque $\frac{\pi}{2} - \alpha$, supponendo π mezza circonferenza: quindi nel limite in-

feriore avremo $\frac{\pi}{2} - \alpha$. Nel limite superiore abbiamo

$$\text{arc. sen.}(=1) = \frac{\pi}{2} ;$$

sottraendo da questo l'antecedente sarà α : dunque

$$a^3 \int_{\text{arc. sen. } \alpha}^a \frac{dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = a^3 \alpha .$$

Integriamo per parti

$$\frac{-x^2 dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} , \text{ avremo } - \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} =$$

$$\int x \cdot \frac{-x dx}{\sqrt{(a^2-x^2)}} = x \sqrt{(a^2-x^2)} - \int \sqrt{(a^2-x^2)} dx .$$

Sostituendo in (2) avremo

$$\int dx \sqrt{(a^2-x^2)} = a^2 \alpha + x \sqrt{(a^2-x^2)} - \int \sqrt{(a^2-x^2)} dx ,$$

da cui ricaviamo

$$\int dx \sqrt{(a^2-x^2)} = \frac{1}{2} a^2 \alpha + \frac{1}{2} x \sqrt{(a^2-x^2)} .$$

Portando ai limiti $x \sqrt{(a^2-x^2)}$ avremo

$$- a^2 \text{sen.} \alpha \cos. \alpha :$$

dunque avremo

$$X = \frac{2}{3} \frac{a \text{sen.}^3 \alpha}{\alpha - \text{sen.} \alpha \cos. \alpha}$$

351. Si debba determinare il centro di gravità dell' area cissoide di diocle nell'asse delle ascisse rispetto cui è posta simmetricamente. L'equazione della cissoide è $y^2 = \frac{x^3}{a-x}$, dove a è l'asse. Avremo

$$X = \frac{\int xy dx}{\int y dx} = \frac{\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{\sqrt{(a-x)}}}{\int_0^a \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{(a-x)}}}.$$

Ora

$$\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{\sqrt{(a-x)}} = - \left[2x^{\frac{5}{2}} \sqrt{(a-x)} \right]_0^a \\ + 5 \int_0^a x^{\frac{3}{2}} \sqrt{(a-x)} dx = 5 \int_0^a x^{\frac{1}{2}} \sqrt{(a-x)} dx =$$

(moltiplicando e dividendo per $\sqrt{(a-x)}$)

$$5a \int_0^a \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{(a-x)}} - 5 \int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{\sqrt{(a-x)}},$$

e trasportando questo ultimo termine nel primo membro sarà

$$\int_0^a \frac{x^{\frac{5}{2}} dx}{\sqrt{(a-x)}} = \frac{5}{6} a \int_0^a \frac{x^{\frac{1}{2}} dx}{\sqrt{(a-x)}};$$

che sostituito in X darà $X = \frac{5}{6} a$.

352. *Centro di gravità del settore circolare.* In questo caso i limiti di r sono zero, ed il raggio a , ed i limiti di θ sono gli angoli $-\alpha$, α , che i raggi all'estremità del settore fanno col raggio che divide simmetricamente il settore. Abbiamo dunque

$$X = \frac{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r^2 \cos. \theta d\theta dr}{\int_{-\alpha}^{\alpha} \int_0^a r d\theta dr} = \frac{\frac{1}{3} a^3 \int_{-\alpha}^{\alpha} \cos. \theta d\theta}{\frac{1}{2} a^2 \int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta}$$

$$= \frac{2}{3} a \frac{\sin \alpha}{\alpha};$$

cioè la distanza del centro di gravità è due terzi del raggio moltiplicato nella corda divisa per l'arco.

353. Si danno l'equazione per la determinazione del centro di gravità d'una superficie qualunque. Sia questa superficie riferita a due assi ortogonali, ed in essa si consideri un elemento rettangolare formato dai differenziali delle sue distanze x, y dai dotti due assi: questo elemento sarà $dx dy$, che moltiplicato prima per x , e poi per y ci darà i suoi due momenti relativi all'asse della y , ed a quello della x . Dunque avremo

$$X = \frac{\int \int x dx dy}{\int \int dx dy}, \quad Y = \frac{\int \int y dx dy}{\int \int dx dy}.$$

354. Le stesse in coordinate polari. Ritenendo le denominazioni superiori (§. 349.) sarà $r dr d\theta$ l'elemento della superficie in coordinate polari. La sua distanza dall'asse delle x è $r \sin \theta$ e da quello delle y è $r \cos \theta$; dunque i momenti saranno $r^2 dr \sin \theta d\theta$, $r^2 dr \cos \theta d\theta$, e perciò

$$X = \frac{\int \int r^2 dr \cos \theta d\theta}{\int \int r dr d\theta}$$

$$Y = \frac{\int \int r^2 dr \sin \theta d\theta}{\int \int r dr d\theta}.$$

355. Applicazioni. Determinare il centro di gravità della parte dell'ellisse compresa fra la curva e due semidiametri coniugati a, b . Avremo

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (a^2 - x^2), \quad X = \frac{\int_0^a \int_0^y x dx dy}{\int_0^a \int_0^y dx dy} =$$

$$\frac{\frac{b}{a} \int_0^a x dx \sqrt{(a^2 - x^2)}}{\frac{b}{a} \int_0^a dx \sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{-\frac{1}{3} [(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^a}{\frac{1}{2} \left[x \sqrt{(a^2 - x^2)} + a^2 \text{arc. sen.} \frac{x}{a} \right]_0^a} =$$

$$\frac{\frac{1}{3} a^3}{\frac{1}{4} \pi a^2} = \frac{4a}{3\pi}.$$

Avremo inoltre

$$Y = \frac{\int_0^a \int_0^y y dx dy}{\int_0^a \int_0^y dx dy} = \frac{\frac{b^2}{a^2} \int_0^a (a^2 - x^2) dx}{\frac{1}{4} \pi ab} =$$

$$\frac{\frac{1}{3} ab^3}{\frac{1}{4} \pi ab} = \frac{4b}{3\pi}$$

356. Determinare il centro di gravità di un segmento di ellisse compreso fra la curva, e la corda che congiunge gli estremi di due diametri coniugati. Per aiuto dell'immaginazione si supponga l'asse $2a$ verticale, ed il $2b$ orizzontale. È chiaro che l'equazione della corda sarà

$$y' = \frac{b}{a} (a - x).$$

Avremo dunque

$$X = \frac{\int_0^a \int_{y'}^y x dx dy}{\int_0^a \int_{y'}^y dx dy} =$$

$$\frac{\frac{b}{a} \int_0^a [(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - (a - x)] x dx}{\frac{b}{a} \int_0^a [(a^2 - x^2)^{\frac{1}{2}} - (a - x)] dx}$$

$$\frac{\frac{1}{6} a^2 b}{\frac{1}{4} (\pi - 2) ab} = \frac{2}{3} \frac{a}{\pi - 2}$$

Senza fare il calcolo per la Y la simmetria della figura ci darà

$$Y = \frac{2}{3} \frac{b}{\pi - 2}.$$

357. Per applicazione delle formole colle coordinate polari si debba trovare il centro di gravità d'un settore parabolico compreso fra la curva, e due raggi vettori condotti dal foco. Siano α , β gli angoli che formano coll'asse della parabola i due raggi vettori. L'equazione polare della parabola sia

$$r = \frac{p}{2 \cos. \frac{1}{2} \theta},$$

dove il θ è l'angolo supplemento di quello supposto nel (§. 349); onde in quella formola dovremo porre $\pi - \theta$ invece di θ ; quindi sarà

$$X = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r r^2 \cos. (\pi - \theta) d\theta dr}{\int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r r dr d\theta} =$$

$$= \frac{\frac{p^3}{8} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\cos. \theta}{\cos. \frac{1}{2} \theta} d\theta}{\frac{1}{2} \frac{p^3}{4} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\theta}{\cos. \frac{1}{2} \theta}}.$$

Ora

$$\frac{\cos. \theta}{\cos. \frac{1}{2} \theta} d\theta = \frac{1 - \tan. \frac{1}{2} \theta}{1 + \tan. \frac{1}{2} \theta} \sec. \frac{1}{2} \theta d\theta =$$

$$(1 - \tan. \frac{1}{2} \theta) \sec. \frac{1}{2} \theta d\theta =$$

$$(1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \theta) \frac{d\theta}{\cos^2 \frac{1}{2} \theta} =$$

$$(1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \theta) d. \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta.$$

Avremo dunque

$$X = -\frac{1}{3} p \frac{\int_{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}^{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \beta} (1 - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \theta) d. \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta}{\int_{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha}^{\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \beta} (1 + \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \theta) d. \operatorname{tang} \frac{1}{2} \theta} =$$

$$\frac{p}{3} \frac{\frac{1}{5} (\operatorname{tang}^5 \frac{1}{2} \beta - \operatorname{tang}^5 \frac{1}{2} \alpha) - (\operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha)}{\frac{1}{3} (\operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} \beta - \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} \alpha) + (\operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha)}.$$

Avremo poi

$$Y = \frac{\int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r r^2 \operatorname{sen}(\pi - \theta) d\theta dr}{\int_{\alpha}^{\beta} \int_0^r r d\theta dr}.$$

Ora l'integrale del numeratore è uguale ad

$$\frac{1}{3} \frac{p^3}{8} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\operatorname{sen} \theta d\theta}{\cos^6 \frac{1}{2} \theta} =$$

$$= -\frac{1}{3} \frac{p^3}{8} \int_{\cos^2 \frac{1}{2} \alpha}^{\cos^2 \frac{1}{2} \beta} \frac{d. \cos \frac{1}{2} \theta}{\cos^5 \frac{1}{2} \theta} =$$

$$\frac{1}{3} \frac{p^3}{8} (\cos^4 \frac{1}{2} \beta - \sec^5 \frac{1}{2} \alpha),$$

e quindi

$$Y = \frac{p}{3} \frac{\frac{1}{8} (\operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \beta - \operatorname{tang}^4 \frac{1}{2} \alpha) + (\operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \beta - \operatorname{tang}^2 \frac{1}{2} \alpha)}{\frac{1}{3} (\operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} \beta - \operatorname{tang}^3 \frac{1}{2} \alpha) + (\operatorname{tang} \frac{1}{2} \beta - \operatorname{tang} \frac{1}{2} \alpha)}.$$

358. Altra formola per la determinazione del centro di gravità di una superficie piana. Considerando una superficie fra due coordinate ortogonali x, y , e la curva s , si supponga condotta un'ordinata infinitamente prossima alla y , avremo un rettangolo di base y , e di altezza dx , onde il suo valore sarà ydx . Si supponga riconcentrato questo rettangolo nel suo punto medio; distando questo di x dall'asse delle y , il momento di ydx rispetto quest'asse sarà $yx dx$: quindi dicendo X la distanza del centro di gravità della detta area dall'asse della y avremo

$$X = \frac{\int yx dx}{\int y dx}.$$

Il centro di gravità del rettangolo ydx dista dall'asse delle x di $\frac{y}{2}$: dunque il suo momento rispetto questo sarà $\frac{1}{2}y^2 dx$; perciò dicendo Y la distanza del centro di gravità della proposta superficie dal detto asse delle x , avremo

$$Y = \frac{\int y^2 dx}{\int y dx}.$$

359. Quindi le due formole determinative del centro di gravità d'una superficie qualunque saranno

$$(a) \quad X = \frac{\int yx dx}{\int y dx}, \quad Y = \frac{\int y^2 dx}{\int y dx}.$$

360. Applicazione. Si supponga un trapezio colle basi parallele orizzontali; la superiore sia $2p$, e l'inferiore $2q$. Sia il lato a dritta, uguale ad a , l'asse delle x , e la base superiore quello delle y . Applicando le formole (a) avremo

$$X = \frac{a}{3} \cdot \frac{p+2q}{p+q}, \quad Y = \frac{2}{3} q. \quad (b).$$

Per giungere a questi risultamenti, si prenda l'equazione $y = my + n$ del lato incontro ad a , ed invece della y uella

prima delle equazioni (a) si ponga questa funzione di x .
Si faccia l'integrazione e si troverà

$$X = \frac{x}{3} \cdot \frac{2mx+3n}{mx+2n}.$$

Nella seconda della (a) si ponga $\frac{dy}{m}$ invece di dx e si avrà

$$Y = \frac{1}{3} y.$$

Ponendo in questa invece di y la base $2p$, e nell' antecedente in luogo di x la a , invece di n , $2p$, e per m ,

$$\frac{2q-2p}{a}$$

avremo le (b). Se si fosse presa la linea bisegante i lati paralleli per asse delle x , fatta uguale ad a , si sarebbe pur trovato

$$X = \frac{a}{3} \cdot \frac{p+2q}{p+q},$$

e questa sarebbe bastata per trovare il centro di gravità come nella (din. §. 47). Se nelle equazioni (b) si fa $p = 0$ troveremo

$$X = \frac{2a}{3}, Y = \frac{2q}{3};$$

cioè il centro di gravità del triangolo è a due terzi della retta, che dal vertice va alla metà della base, nel nostro caso $2q$. Infatti il lato a , la retta bisecante la base, e la mezza base q formano un triangolo. Se dal punto $\frac{2a}{3}$ si conduca alla retta bisegante una parallela alla q , che diremo ordinata, come la porzione $\frac{2a}{3}$ è due terzi della retta a , così l'ordinata è $\frac{2}{3}$ della base q , e la porzione della retta bisegante al di sopra dell'ordinata è due terzi della stessa retta.

361. Equazione pel centro di gravità della superficie di rivoluzione. Sia s la curva computata dall'origine delle ascisse, che nel r avvolgersi intorno all' asse di queste generi la superficie. L'archetto ds genererà una superficie di cilindro, che ha y per raggio della base: dunque la superficie di detto cilindro sarà $2\pi y ds$. Questa si potrà porre in dx ove è il suo centro di gravità: quindi il momento di questa superficieola rispetto l'origine delle ascisse sarà $2\pi y x ds$: dunque avremo

$$X = \frac{\int y x ds}{\int y ds}$$

per l'equazione domandata.

362. Applicazioni. Determinare il centro di gravità di una zona sferica. Siano b , c le distanze del centro della sfera dalli due piani terminanti la zona. L'equazione della curva generatrice è $x^2 + y^2 = a^2$. Da questa avremo

$$ds = - \frac{adx}{y},$$

e quindi

$$X = \frac{\int_b^c x dx}{\int_b^c dx} = \frac{1}{2} \frac{(c^2 - b^2)}{c - b} = \frac{1}{2} (b + c).$$

363. Pel centro di gravità della superficie di un cono retto di altezza c avremo

$$X = \frac{2}{3} c.$$

364. Si debba trovare il centro di gravità della superficie generata da mezza cicloide. Se prendiamo l'equazione differenziale

$$dy = dx \sqrt{\left(\frac{2r-x}{x}\right)},$$

da cui si ha

$$ds = \sqrt{2r} \cdot \frac{dx}{\sqrt{x}}, \text{ ed } s = 2\sqrt{2rx}$$

s'integreranno per parti l'espressioni $\int yz dx$, $\int y dz$, avendovi prima sostituito il valore di ds , e prendendo y pel fattore da differenziarsi nell'integrale proveniente dal detto metodo dell'integrazione per parti, si troverà così

$$X = \frac{2}{15} r \frac{15\pi - 8}{3\pi - 4}.$$

365. Per esercizio a risolvere lo stesso problema si potranno assumere i valori delle coordinate dati dalle equazioni

$$x = r(1 - \cos.\omega), \quad y = r(\omega + \sin.\omega).$$

La ω è l'arco pel raggio uno dello stesso numero di gradi di quello, che è al di sopra dell'ordinata della cicloide nel mezzo circolo generatore posto in mezzo.

366. Si troverà, che il centro di gravità della superficie del parabolide di equazione $y^2 = 2px$, è dato dall'equazione.

$$X = \frac{1}{5} \frac{(3x-p)(2x+p)^{\frac{5}{2}} - p^{\frac{5}{2}}}{(2x+p)^{\frac{5}{2}} - p^{\frac{5}{2}}}.$$

367. **Equazioni pel centro di gravità di una superficie qualunque.** Si consideri un elemento qualunque infinitesimo della data superficie. Poichè la sua figura può essere qualunque, perchè d'un infinitesimo, quindi si può supporre, tale che proiettata sul piano delle x , y dia il rettangolo $dx dy$ essendo il detto elemento in un punto di coordinate x , y , z . Poichè la proiezione d'una superficie piana qualunque è uguale a questa superficie moltiplicata pel coseno dell'angolo che fanno due normali l'una alla detta superficie, e l'altra alla proiezione: quindi l'elemento già detto della superficie qualunque sarà uguale alla sua proiezione $dx dy$ divisa pel coseno dell'angolo fatto dalla

normale alla superficie coll'asse delle z , che è la normale al piano delle x, y , su cui si trova la sua proiezione. Sia

$$dz + p dx + q dy = 0$$

l'equazione della superficie, l'angolo fatto dalla normale a questa nel punto di coordinate x, y, z coll'asse delle z è (§. 304.)

$$\frac{1}{\sqrt{(1+p^2+q^2)}};$$

dunque l'elemento della superficie sarà

$$dxdy \sqrt{(1+p^2+q^2)}.$$

Se ora si dicano X, Y, Z , le coordinate del centro di gravità della superficie qualunque avremo

$$(1) \left\{ \begin{aligned} X &= \frac{\iint x dx dy \sqrt{(1+p^2+q^2)}}{\iint dx dy \sqrt{(1+p^2+q^2)}} \\ Y &= \frac{\iint y dx dy \sqrt{(1+p^2+q^2)}}{\iint dx dy \sqrt{(1+p^2+q^2)}} \\ Z &= \frac{\iint z dx dy \sqrt{(1+p^2+q^2)}}{\iint dx dy \sqrt{(1+p^2+q^2)}} \end{aligned} \right.$$

368. Applicazione. Sia da determinarsi il centro di gravità della superficie d'un quarto di cono retto tagliato da due piani normali, che passano pel suo asse. Si prendano questi piani per quelli delle $x, z; y, z$, che per conseguenza sopra la base del cono di distanza a dal vertice diamo colle loro intersezioni gli assi delle x , ed y . L'equazione della superficie di questo cono si può rappresentare con

$$z = m \sqrt{(x^2 + y^2)},$$

ove m è la tangente dell'angolo, che la linea generatrice della superficie fa colla base. Nel nostro caso sarà

$$p = \frac{dz}{dx} = - \frac{mx}{\sqrt{(x^2+y^2)}},$$

$$q = \frac{dz}{dy} = - \frac{my}{\sqrt{(x^2+y^2)}};$$

quindi

$$\sqrt{(1+p^2+q^2)} \, dx dy = \sqrt{(1+m^2)} dx dy.$$

Integrando relativamente ad y avremo

$$\int \sqrt{(1+p^2+q^2)} \, dx dy = \sqrt{(1+m^2)} \int y dx.$$

I limiti di questo integrale sono zero ed

$$y = \frac{\sqrt{(a^2-m^2x^2)}}{m},$$

che si ha dall'equazione

$$z = m \sqrt{(x^2+y^2)}$$

ponendovi a invece di z per andare al piano delle x, y ;
dunque il primo integrale antecedente diventerà

$$\frac{\sqrt{(1+m^2)}}{m} \int \sqrt{(a^2-m^2x^2)} \, dx.$$

Integrando col processo del (§. 350) avremo

$$\frac{\sqrt{(1+m^2)}}{2m} \left[x \sqrt{(a^2-m^2x^2)} + \frac{a^2}{m} \arcsin \left(\frac{mx}{a} \right) \right] + C.$$

I limiti di questo integrale sono

$$x = 0, x = \frac{a}{m},$$

che si ha dell'equazione

$$a = m \sqrt{(x^2+y^2)}$$

facendo $y = 0$ per andare all'asse delle x . Applicando que-

sti limiti all'integrale antecedente, avremo per l'integrale domandato, che è il denominatore comune delle formole (1) (§. 367),

$$\frac{\pi a^3 \sqrt{1+m^2}}{4m^2},$$

che è la superficie del quarto del cono come si poteva aver subito. Il primo numeratore delle equazioni (1) diventa

$$\sqrt{1+m^2} \int x dy dx = \sqrt{1+m^2} \int y x dx,$$

ove ponendo $\sqrt{a^2 - m^2 x^2}$ invece di y diventa

$$\sqrt{1+m^2} \int x dx \sqrt{a^2 - m^2 x^2}$$

ossia

$$- \frac{\sqrt{1+m^2}}{3m^3} (a^2 - m^2 x^2)^{3/2} + C.$$

Si porti l'integrale ai limiti $x=0$, $x=\frac{a}{m}$ e diventerà

$$\frac{a^3 \sqrt{1+m^2}}{3m^2}.$$

Fatta la prima integrazione nel secondo numeratore della (1) rispetto la y e postovi il valore

$$y = \frac{\sqrt{a^2 - m^2 x^2}}{m}$$

avremo

$$\begin{aligned} & \frac{\sqrt{1+m^2}}{2} \int \frac{(a^2 - m^2 x^2)}{m^2} dx \\ &= \frac{\sqrt{1+m^2}}{2m^2} \left(a^2 x - \frac{m^2 x^3}{3} \right) + C, \end{aligned}$$

integrale che portato ai limiti $x=0$, $x=\frac{a}{m}$ mi dà come innanzi

$$\frac{a^3\sqrt{1+m^2}}{3m^3};$$

talchè riuscirà $X = Y$.

In ultimo abbiamo che il terzo numeratore della (1) è

$$\begin{aligned} & \sqrt{1+m^2} \iint x dx dy = \sqrt{1+m^2} \iint m \sqrt{x^2+y^2} dx dy \\ & = m \sqrt{1+m^2} \int \left[\frac{dy \sqrt{x^2+y^2}}{2} + \frac{x^2}{2} L \frac{y + \sqrt{x^2+y^2}}{x} \right] dx. \end{aligned}$$

Ponendo in questa

$$\frac{\sqrt{a^2-m^2x^2}}{m},$$

in luogo di y diventerà

$$\frac{m \sqrt{1+m^2}}{2} \int \left[\frac{a \sqrt{a^2-m^2x^2}}{m^2} + x^2 L \frac{\sqrt{a^2-m^2x^2} + a}{mx} \right] dx.$$

S' integrerà questa espressione usando l'integrazione per parti nel termine ove è il logaritmo, e portando il risultato ai soliti limiti $x=0$, $x=\frac{a}{m}$ avremo in ultimo

$$\frac{\pi a^3 \sqrt{1+m^2}}{6m^3}.$$

Raccogliendo tutti i risultamenti avremo

$$\begin{aligned} X = Y &= \frac{a^3 \sqrt{1+m^2}}{3m^3} \cdot \frac{4m^2}{\pi a^3 \sqrt{1+m^2}} = \frac{4a}{3\pi m} \\ Z &= \frac{\pi a^3 \sqrt{1+m^2}}{6m^3} \cdot \frac{4m^2}{\pi a^3 \sqrt{1+m^2}} = \frac{2}{3} a. \end{aligned}$$

369. Equazioni per li centri di gravità dei solidi.

Sia in primo luogo il solido di rivoluzione. Di questo solido l'elemento è un cilindro infinitesimo che si esprime

con $\pi y^2 dx$. Collocato questo in dx , ove è il suo centro di gravità, il momento rispetto l'origine delle ascisse sarà $\pi y^2 x dx$. Dunque

$$X = \frac{\int y^2 x dx}{\int y^2 dx}.$$

370. Se si voglia in coordinate polari si riassume (§. 349.) l'elemento $r dr d\theta$ dell'area, ove θ è l'angolo fatto coll'asse delle z , che si suppone verticale, essendo orizzontali gli assi delle x , e delle y . Si proietti il raggio vettore r , che parte dall'origine delle coordinate sul piano delle x , y , e sia ω l'angolo, che questa proiezione fa coll'asse delle x . Si supponga, che l'elemento $r dr d\theta$ roti intorno all'asse delle z dell'angolo $d\omega$; descriverà un archetto di raggio $r \sin \theta$, che è la distanza del detto elemento dall'asse di rotazione: quindi l'archetto descritto avrà il valore $r \sin \theta d\omega$: il solido detto proveniente sarà l'areola $r dr d\theta$ ripetuta per questo arco, che perciò avrà per valore $r^2 dr \sin \theta d\theta d\omega$. Se si prende l'origine delle coordinate come centro de' momenti, la distanza di questo elemento da questo centro sarà $r \cos \theta$: dunque il suo momento sarà

$$r^3 dr \sin \theta \cos \theta d\theta d\omega.$$

Se si dirà Z la distanza del centro di gravità dal centro de' momenti del solido posto simmetricamente rispetto l'asse delle z avremo

$$Z = \frac{\iiint r^3 dr \sin \theta \cos \theta d\theta d\omega}{\iiint r^2 dr \sin \theta d\theta d\omega}.$$

371. Se il solido sia qualunque, questa sarà la formola per la distanza del centro di gravità dal piano delle x , y .

Ora l'elemento $r^2 dr \sin \theta d\theta d\omega$ dista dai piani delle z , x ; delle x , y di $r \sin \theta \sin \omega$, $r \sin \theta \cos \omega$. Infatti queste distanze sono le distanze dai detti piani dell'estremità della proiezione $r \sin \theta$ del raggio vettore r sul piano delle x , y

Dopo ciò avremo per la distanza del centro di gravità dai detti piani

$$X = \frac{\iiint r^3 dr \sin \theta \cos \theta d\theta d\omega}{\iiint r^3 dr \sin \theta d\theta d\omega}.$$

$$Y = \frac{\iiint r^3 dr \sin \theta \sin \theta \cos \theta d\theta d\omega}{\iiint r^3 dr \sin \theta d\theta d\omega}.$$

372. Se l'elemento del solido, che ha per coordinate rettangolari x, y, z , si considera come un parallelepipedo rettangolare di spigoli dx, dy, dz , sarà $dx dy dz$, e perciò le formole pel centro di gravità del solido saranno

$$X = \frac{\iiint x dx dy dz}{\iiint dx dy dz},$$

$$Y = \frac{\iiint y dx dy dz}{\iiint dx dy dz},$$

$$Z = \frac{\iiint z dx dy dz}{\iiint dx dy dz}.$$

373. **Applicazioni.** Trovare il centro di gravità di un segmento di sfera. Sia r il raggio della sfera, e c la distanza della base del segmento dal centro della sfera, e sia questo centro l'origine delle coordinate avremo (§. 369.)

$$\begin{aligned} X &= \frac{\int_c^r x(r^2 - x^2) dx}{\int_c^r (r^2 - x^2) dx} \\ &= \frac{\frac{1}{4}(r^2 - c^2)^2}{\frac{2}{3}r^3 - r^2c + \frac{1}{3}c^3} = \frac{3}{4} \frac{(r + c)^2}{2r + c}. \end{aligned}$$

Determinate il centro di gravità di una parte del paraboloide di rivoluzione. Siano a, b i raggi delle due basi, ed

la loro distanza. La distanza del centro di gravità dalla piccola base di raggio a sarà data dalla equazione

$$X = \frac{h}{3}, \frac{a^2 + 2b^2}{a^2 + b^2}.$$

374. Trovate il centro di gravità del solido generato dalla rivoluzione di un settore di circolo intorno ad uno dei raggi estremi. Sia a il raggio del circolo, e β l'angolo del settore avremo (§. 370.)

$$\begin{aligned} Z &= \frac{\int_0^\beta \int_0^a r^3 \text{sen.} \theta \cos. \theta d\theta dr}{\int_0^\beta \int_0^a r^2 \text{sen.} \theta d\theta dr} \\ &= \frac{\frac{1}{4} a^4 \int_0^\beta \text{sen.} 2\theta d\theta}{\frac{1}{3} a^3 \int_0^\beta \text{sen.} \theta d\theta} \\ &= \frac{\frac{1}{16} a^4 (1 - \cos. 2\beta)}{\frac{1}{3} a^3 (1 - \cos. \beta)} = \frac{3}{8} a (1 + \cos. \beta) = \frac{3}{4} a \cos.^2 \frac{1}{2} \beta. \end{aligned}$$

375. Determinare il centro di gravità della porzione del cono $y^2 + x^2 = \beta^2 x^2$, che è compreso fra i piani delle zx , e delle xy , ed un terzo piano parallelo a quello delle yz . Sia a la distanza di questo terzo piano dall'origine avremo (§. 372.)

$$\begin{aligned} X &= \frac{\int_0^a \int_0^{\beta x} x \sqrt{(\beta^2 x^2 - y^2)} dx dy}{\int_0^a \int_0^{\beta x} \sqrt{(\beta^2 x^2 - y^2)} dx dy} \\ &= \frac{\int_0^a x \cdot \frac{1}{4} \pi \beta^2 x^2 dx}{\int_0^a \frac{1}{4} \pi \beta^2 x^2 dx} = \frac{\frac{1}{16} \pi \beta^2 a^4}{\frac{1}{12} \pi \beta^2 a^3} = \frac{3}{4} a. \end{aligned}$$

$$Y = \frac{\int_0^a \int_0^{\beta x} y \sqrt{(\beta^2 x^2 - y^2)} dx dy}{\int_0^a \int_0^{\beta x} \sqrt{(\beta^2 x^2 - y^2)} dx dy}$$

$$= \frac{\int_0^a \frac{1}{3} \beta^3 x^3 dx}{\frac{1}{12} \pi \beta^3 a^3} = \frac{\beta}{\pi} a.$$

Si troverà $Z = \frac{\beta}{\pi} a$.

376. Formola pel centro di gravità d'un solido posto simmetricamente rispetto un asse, e terminato da basi parallele. Si supponga quest' asse quello delle ascisse, e ad un punto di ascissa x si sia fatta una sezione parallela alla base, che si dica K : se se ne faccia un'altra infinitamente prossima, sarà pure K , e la parte infinitesima del solido compresa fra le due sezioni sarà espressa da $mKdx$, ove m è il seno dell' angolo d'inclinazione dell' asse alle basi. Dopo ciò avremo per la formola domandata

$$(1) \quad X = \frac{\int Kx dx}{\int K dx}.$$

377. Applicazione. Sia il solido un tronco di piramide. La retta che unisce i centri di gravità delle basi è l'asse rispetto cui il detto tronco è posto simmetricamente. Si supponga quest' asse prolungato fino che arrivi al vertice della piramide compita. Si dica b la base superiore del tronco, B la base inferiore. Sia A l'intera retta, che dal vertice della piramide va al centro di gravità della base, ed a la porzione di questa retta, che dal detto vertice va al centro di gravità della base superiore. Le sezioni nel tronco parallele alle due basi essendo simili, le loro aree saranno come i quadrati delle rette omologhe: quindi

$$(2) \quad b=na^2, \quad B=nA^2, \quad e \quad K=n(a+x)^2,$$

ove n è il rapporto costante. L'equazione (1) diventerà

$$X = \frac{f(a+x)^2 x dx}{f(a+x)^2 dx}.$$

Fatte l'integrazioni e riduzioni avremo

$$X = \frac{x}{4} \cdot \frac{6a^2 + 8ax + 3x^2}{3a^2 + 3ax + x^2}.$$

dando ad x tutta l'estensione per avere il centro di gravità del tronco si porrà $x = A - a$, quindi troveremo

$$X = \frac{A-a}{4} \cdot \frac{a^2 + 2aA + 3A^2}{a^2 + Aa + A^2}.$$

Se in luogo di $A-a$ si ponga d , ed invece di A , $\sqrt{\frac{B}{n}}$;

ed invece di a , $\sqrt{\frac{b}{n}}$, come si ricava dalle (2), avremo

$$X = \frac{d}{4} \cdot \frac{3B + 2\sqrt{Bb} + b}{B + \sqrt{Bb} + b}$$

come si ebbe nella (din. §. 54). Se la piramide è intera sarà

$$b = 0, \quad e \quad quindi \quad X = \frac{3}{4} d$$

come si ebbe nella (din. §. 52).

378. Teorema di Goldini. Abbiamo

$$(3) \quad Y = \frac{f y ds}{s} \quad (\S. 341); \quad Y = \frac{\frac{1}{2} f y^2 x}{f y dx} \quad (\S. 359).$$

Si moltiplichi la prima per $2\pi s$, e la seconda per $2\pi f y dx$ avremo

$$(4) \quad 2\pi Y s = f 2\pi y ds, \quad 2\pi Y f y dx = f \pi y^2 dx.$$

Nella prima $2\pi Y$ è la circonferenza descritta dal centro di gravità di s quando questa linea si avvolge intorno all'asse x , ed il secondo membro $\int 2\pi y ds$ è la superficie generata da s nella detta rivoluzione: dunque la prima delle equazioni (4) mi dice, che la superficie generata dal avvolgersi d'una linea intorno ad un'asse è uguale alla linea generante moltiplicata nella circonferenza descritta dal suo centro di gravità. Riguardo alla seconda delle (4) $\int y dx$ è un'area. Se questa si supponga avvolgersi intorno all'asse delle x , $2\pi Y$ sarà la circonferenza descritta dal suo centro di gravità. Il secondo membro è il solido prodotto dalla detta rivoluzione: dunque il solido generato dalla rivoluzione di una superficie intorno ad un asse è uguale alla superficie generante moltiplicata nella circonferenza descritta dal di lei centro di gravità. Questi due teoremi furono dimostrati in altra maniera nella (din. §. 62, 63).

379. **Riflessione sul teorema di Goldini.** Il divisato metodo di misurazione delle figure di rivoluzione per mezzo d'un teorema di meccanica si suol credere d'una estensione troppo grande, mentre è di ristrettissima. Infatti se le stesse formole (3), che dimostrano il teorema s'impieghino a trovare le distanze Y del centro di gravità dall'asse di rotazione, già dalla prima integrazione di

$$(5) \quad \int y ds, \quad \int y^2 dx$$

colla semplice moltiplicazione per 2π si trova la superficie ed il solido generato: quindi è più spedito di trovare la misura delle dette figure con queste formole (5), che procedere a trovare il denominatore s , ed $\int y dx$, per cui divider le formole, (5) per poi distruggere questa divisione col moltiplicare il $2\pi Y$ per s , e per $\int y dx$, e così distruggere l'operazione fatta. Quindi il modo meccanico della misurazione è solamente utile quando, come abbiamo fatto nella (din. §. 64), si conoscano i centri di gravità delle figure senza le divisate formole; il che restringe assai l'immaginata generalità del metodo.

CAP. XXIII.

Equilibrio stabile ed instabile di un sistema pesante.

380. Definizione dell'equilibrio stabile ed instabile. Per equilibrio stabile s'intende quello, nel quale avendo luogo un moto minimo, il sistema dopo qualche oscillazione vi torna da se; ed instabile è l'equilibrio quando pel moto minimo prosegue a muoversi. Per esempio nella bilancia in equilibrio, quando il centro di gravità è sotto il fulcro, cioè nel posto più basso, si ha l'equilibrio stabile, perchè avvenendo un moto minimo la macchina dopo oscillazioni si riconduce al primiero stato. Se però il centro di gravità fosse al di sopra del fulcro, traboccando un poco, seguirebbe l'andamento, e non si ricondurrebbe allo stato primitivo. Quindi la condizione affinchè un sistema pesante sia in equilibrio stabile è che il suo centro di gravità sia nel punto più basso. L'instabile poi avviene quando questo centro è il più elevato possibile. Nella teoria del moto daremo più generalmente le condizioni per ambedue gli equilibri.

381. Applicazioni. Si abbia una verga AGB mobile intorno alla sua estremità A, e sostenuta da un filo, che è attaccato al suo centro di gravità G, e che passa per una piccolissima girella C, e porta un peso Q. La girella è col suo centro sulla verticale condotta dall'estremità A ad una distanza AC uguale a quella del centro di gravità AG: determinare la posizione dell'equilibrio stabile e non stabile. Non si valuta il peso del filo.

382. Sia a la distanza AC, o AG, l la lunghezza totale del filo GCQ; P il peso della verga, e θ l'angolo ACG, o AGC. La distanza del centro di gravità del sistema dalla orizzontale condotta pel centro della girella sarà

$$\frac{P(a + a \cos 2\theta) + Q(l - 2a \cos \theta)}{P + Q}$$

Essendo tutto il resto costante, il massimo o minimo di questa formola sarà il massimo e minimo nella quantità

$$P \cos 2\theta - 2Q \cos \theta.$$

Se si rappresenti per u avremo

$$\frac{du}{d\theta} = -2P \sin 2\theta + 2Q \sin \theta$$

Nel caso dell'equilibrio non vi può essere variazione nella u , cioè nella distanza del centro di gravità dall'orizzontale, dunque questa derivata dovrà essere zero, da che ricaveremo

$$\theta = 0, \text{ o } \cos \theta = \frac{Q}{2P}$$

L'equilibrio stabile sarà quello, cui corrisponderà il massimo di u , o la derivata seconda u negativa: ed il contrario dovrà essere per l'equilibrio non stabile. Ora se $\theta = 0$ abbiamo

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -4P + 2Q :$$

quindi questa quantità sarà negativa o positiva, e perciò l'equilibrio stabile, o non stabile secondo che sarà

$$Q < 2P, \text{ o } Q > 2P.$$

Se nel valore generale di $\frac{d^2u}{d\theta^2}$ posto sotto la forma

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -4P(2\cos^2\theta - 1) + 2Q\cos\theta$$

si pone

$$\cos \theta = \frac{Q}{2P}$$

sarà

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = \frac{4P^2 - Q^2}{P}$$

Questa quantità è positiva quando $Q < 2P$, o, che è lo stesso, quando il valore dell'angolo θ determinato dall'equazione

$$\cos\theta = \frac{Q}{2P}$$

è reale: dal che risulta che questo secondo valore non può riferirsi ad un equilibrio stabile.

383. *Una verga omogenea AB si appoggia colle sue estremità sopra due piani inclinati, ed è in equilibrio. Dire se l'equilibrio è stabile o instabile.* Siano $2a$ la lunghezza della verga, θ la sua inclinazione sull'orizzontale, ed α, α' le inclinazioni dei due piani inclinati CA, CB: e supponiamo $\alpha' > \alpha$. La distanza del centro di gravità della verga al piano orizzontale, che contiene il punto d'unione dei due piani inclinati è espressa da

$$\begin{aligned} & a \sin\theta + 2a \frac{\sin(\alpha' - \theta)}{\sin(\alpha' + \alpha)} \sin\alpha \\ &= \frac{a}{\sin(\alpha' + \alpha)} [\sin(\alpha' - \alpha) \sin\theta + 2 \sin\alpha' \sin\alpha \cos\theta]. \end{aligned}$$

Essendo costante il fattore

$$\frac{a}{\sin(\alpha' + \alpha)},$$

il massimo ed il minimo domandato dipenderà dall'altro fattore. Si ponga dunque

$$u = \sin(\alpha' - \alpha) \sin\theta + 2 \sin\alpha' \sin\alpha \cos\theta :$$

Di qui avremo

$$\frac{du}{d\theta} = \sin(\alpha' - \alpha) \cos\theta - 2 \sin\alpha' \sin\alpha \sin\theta,$$

che in caso d'equilibrio dovendo esser zero ci dà

$$\operatorname{tang}.\theta = \frac{\operatorname{sen}.\left(\alpha' - \alpha\right)}{2\operatorname{sen}.\alpha'\operatorname{sen}.\alpha}.$$

Poichè il secondo membro è positivo, la θ è minore di $\frac{\pi}{2}$.

Ciò posto la derivata seconda ci dà

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} = -\operatorname{sen}.\left(\alpha' - \alpha\right)\operatorname{sen}.\theta - 2\operatorname{sen}.\alpha\operatorname{sen}.\alpha'\cos.\theta$$

che essendo negativa per un valore di θ minore di $\frac{\pi}{2}$,

l'equilibrio è instabile, perchè il centro di gravità ha la massima elevazione sull'orizzonte.

CAP. XXIV.

Esercizi.

384. Un peso P è sostenuto sopra un piano inclinato da tre forze ciascuna uguale ad $\frac{1}{3}P$, l'una diretta verticalmente dal basso in alto l'altra parallela alla lunghezza del piano, e la terza orizzontale, si domanda l'inclinazione dal piano all'orizzonte.

385. Due verghe pesanti rettilinee uguali ed omogenee AC , BC aventi i loro estremi congiunti con una funicella flessibile, ed inestensibile sono poste in un piano verticale sopra un piano levigato appoggiandosi l'una all'altra nell'estremità C . Si domanda la tensione della funicella AB .

386. Ai tre vertici A , B , C , di un triangolo sono applicate tre forze parallele P , Q , R , trovare il punto sul triangolo, ove applicata una forza S sia con esse in equilibrio, e dimostrare, che una qualunque di queste quattro forze è come l'area del triangolo, che si ha congiungendo con rette i punti di applicazione delle altre tre.

387. Un paraboloide posato sopra un piano orizzontale è in equilibrio trovare la sua posizione.

388. Vi sono due sostegni C, D, ed un arco di circolo pesante ACDB che poggia sopra di un C, ed è premuto da D che gli è al disopra : o fra i detti sostegni può facilmente scorrere, trovate la posizione dell'arco quando è in equilibrio.

389. Un dato cono è posto colla sua base sopra un piano inclinato, ed il coefficiente dell'attrito è cognito; determinare l'inclinazione del piano in guisa che aumentandosi il cono sia per rovesciare, o scorrere.

390. Un dato trave pesante è con un suo estremo sopra un dato piano inclinato, determinate la forza d'applicarsi all'estremità sul piano orizzontale, onde non strisci.

391. L'estremità superiore di una data verga si appoggia ad un levigato piano verticale, e l'estremità inferiore è sospesa da una funicella non pesante fissa in un punto del piano: trovate la posizione dell'equilibrio.

392. Due dati pesi sono appiccati agli estremi di leva angolare, li di cui bracci sono dati, insieme coll'angolo della leva. Trovate la posizione dell'equilibrio

393. Una leva angolare pesante di uniforme grossezza e materia è in equilibrio col suo più corto braccio orizzontale: ma se la lunghezza di questo braccio fosse duplicata, la leva sarebbe in equilibrio coll'altro braccio orizzontale. Trovate la ragione della lunghezza dei bracci, e l'angolo della loro inclinazione.

394. Due forze sono applicate alle estremità dei bracci a , b di una leva retta scorrevole sul fulero cogli angoli α , β provare che nel caso d'equilibrio deve essere

$$\frac{a}{b} = \frac{\tan \beta}{\tan \alpha},$$

395. Due uguali forze agiscono in direzione opposta lungo due lati opposti di un parallelogrammo, ed una terza lun-

go la diagonale: trovare la forza che sia in equilibrio con queste.

396. Una data sfera è in equilibrio fra due dati piani inclinati: trovare la pressione sopra ambedue.

397. Due pesi si sostengono su due piani inclinati della stessa altezza per mezzo di fune flessibile, non pesante, che passa per una girella posta nel comune vertice: trovare la proporzione dei loro pesi.

398. Se un emisfero, ed un paraboloide della stessa materia sono uniti in una base comune, che è il circolo dell'emisfero, il solido intero sarà in equilibrio posato su di un piano orizzontale in un punto dell'emisfero se l'altezza del paraboloide sarà $\sqrt{\frac{3}{2}}$ essendo a il raggio dell'emisfero.

399. Un punto materiale posato sulla superficie di una elissoide di rivoluzione è attirato dai fuochi da forze in ragioni m^m, m'^m delle distanze. Qual'è la posizione d'equilibrio?

400. Un solido generato dalla rivoluzione d'un quadrante di una ellisse intorno l'asse maggiore è posto sopra un piano orizzontale col suo asse in una posizione obliqua. Determinate la posizione di equilibrio.

401. Una lamina circolare ed omogenea riposa col suo centro sopra una verga retta verticale. Appicare alla sua circonferenza tre pesi p', p'', p''' in guisa, che la lamina si rimanga orizzontale. Si debbono trovare i coseni degli archi, che separano i pesi $p', p''; p'', p'''; p''', p'$.

402. Una verga pesante ed omogenea appoggiata con una delle sue estremità ad un piano verticale, mentre l'altra estremità è sostenuta da un filo attaccato ad un punto fisso del medesimo piano verticale. Determinare la posizione dell'equilibrio, la pressione contro il piano, e la tensione del filo.

403. Nell'interno d'una sfera vuota si pone una lamina pesante ed omogenea di forma un triangolo isoscele, e li

tre vertici si appoggiano alla sfera; trovate la posizione di equilibrio: cioè trovate l'angolo che il piano del triangolo fa coll'orizzonte.

404. Una lamina pesante si appoggia colle sue due estremità l'una ad un piano verticale, l'altro all'orizzontale, essendo normale all'intersezione dei due piani, e coi coefficienti f , f' dei due attriti. Determinate la inclinazione della lamina all'orizzontale in sul punto di perdere l'equilibrio.

405. Si ha un tetto quadrangolare regolare di travi omogenee colle estremità addossate l'una all'altra; li due travi inferiori sono uguali, ed uguali li due superiori: determinate la relazione, che esiste tra gli angoli, che i travi inferiori, ed i travi superiori formano coll'orizzonte.

Siano $2a$ le lunghezze delle travi inferiori, $2b$ quelle delle superiori: P il peso delle prime, Q quelle delle seconde; α l'inclinazione all'orizzonte delle prime, e β quella delle seconde. Se D è la distanza del centro di gravità del tetto dall'orizzontale avremo.

$$(P + Q) D = P a \sin. \alpha + Q (2a \sin. \alpha + b \sin. \beta).$$

In caso d'equilibrio D deve essere nn massimo o minimo: quindi il differenziale dell'antecedente equazione sarà zero, e ci darà

$$(a) \quad (P + 2Q) a \cos. \alpha d\alpha + Q b \cos. \beta d\beta = 0.$$

La distanza dei due punti sull'orizzontale del tetto è

$$Q a \cos. \alpha + Q b \cos. \beta$$

e questa è invariabile: dunque il suo differenziale sarà zero, cioè

$$(b) \quad a \sin. \alpha d\alpha + b \sin. \beta d\beta = 0.$$

Si moltiplichi l'equazione (a) per $\sin. \alpha \sin. \beta$, e dalla risultante si trovi $\tan. \alpha$, avvertendo all'equazione (b); avremo

$$\tan. \alpha = \frac{P + 2Q}{Q} \tan. \beta.$$

Se $P = Q$, sarà $\tan \alpha = 3 \tan \beta$

questo risultamento combina col (§. 144), perchè se $2P = Q$ nell'equazione $P \tan m = (P + Q) \tan n$ come avviene quando le travi sono uguali ed omogenee, avremo il risultamento antecedente.

406. Una scala inclinata di 30° gradi all'orizzonte è appoggiata con una sua estremità inferiore sopra d'un piano orizzontale, e coll'estremità superiore ad un piano inclinato di 60° all'orizzonte. Questi piani sono perfettamente levigati, e la scala si può considerare come una lamina omogenea. Qual forza orizzontale si deve applicare al piede della scala per impedire che strisci. Se P è il peso della scala la forza richiesta è $\frac{1}{4} P \sqrt{3}$.

407. Allungando la leva pesante di secondo genere, se per una parte s'avvantaggia la potenza accrescendosi il braccio, per l'altra si scapita accrescendosi il momento del peso. Di qui il problema. Dato il peso Q , ed il suo braccio b , e dato il peso g della leva sulla lunghezza 1 , trovate la lunghezza a della leva, che dia il maggior vantaggio alla potenza.

408. Una lamina pesante ed omogenea appoggia una delle sue estremità ad un piano verticale, mentre l'altra estremità è sostenuta da un filo attaccato ad un punto del piano. Supponendo l'attrito, determinare la posizione della lamina quando è sul punto di strisciare.

409. Un punto pesante posto sopra un piano inclinato è sollecitato da una forza data di direzione. Colla teoria delle velocità virtuali determinate in caso d'equilibrio l'intensità della forza, e la pressione sul piano.

410. Un solido di qualunque forma è posato sopra di un piano orizzontale in un punto della sua superficie convessa: trovate la posizione d'equilibrio.

411. Sia $z = f(x, y)$ l'equazione della superficie riferita a tre assi ortogonali dentro il corpo: e siano x, y, z le coordinate del di lei punto a contatto col piano orizzontale, ed x', y', z' , siano le coordinate del centro di gravità. Il piano sul quale è posato il corpo essendo piano tangente alla superficie, se siano α, β, γ , le inclinazioni degli assi coordinati al detto piano saranno

$$\frac{\pi}{2} - \alpha, \frac{\pi}{2} - \beta, \frac{\pi}{2} - \gamma,$$

le inclinazioni dei detti assi alla verticale, che è normale alla superficie nel detto punto di contatto, quindi sarà

$$\text{sen.} \alpha = \frac{-\left(\frac{dz}{dx}\right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}}$$

$$\text{sen.} \beta = \frac{-\left(\frac{dz}{dy}\right)}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}}$$

$$\text{sen.} \gamma = \frac{-1}{\sqrt{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2\right]}}.$$

Ora per l'equilibrio si richiede, che la detta verticale passi pel centro di gravità, ossia, che la retta che passa per i punti (x, y, z) (x', y', z') sia normale alla superficie, cioè debbono esistere l'equazioni

$$0 = x - x' + \left(\frac{dz}{dx}\right)(x - x'), \quad 0 = y - y' + \left(\frac{dz}{dy}\right)(x - x')$$

Queste colla $z = f(x, y)$ ci darà x, y, z , e quindi α, β, γ . Di qui si possono risolvere molti problemi.

PARTE TERZA

CINAMICA

CAPO I.

Equazioni generali del moto.

1 Il moto è costituito (proem. §. 6) dai tre elementi *spazio*, *velocità*, e *tempo*; e la *forza* è la causa del moto. Nella teoria del moto si cercano le formole generali, che leghino questi quattro elementi.

2. Per trovarle si parla primo dei due moti uniforme, ed uniformemente accelerato, perchè avendo in questi collegato in equazioni i detti elementi, col raziocinio si possono trasportare le dette equazioni al caso di un moto qualunque.

3. **Moto uniforme.** Moto uniforme è quello dove in tempi uguali si percorrono spazi uguali. Poichè gli spazi percorsi nello stesso o in eguali tempi sono le velocità (proem. §. 9), quindi il moto uniforme si può dir quello, nel quale la velocità è costante.

4. Sia in questo moto s lo spazio percorso, t il tempo impiegato, ed u la velocità costante. Essendo u lo spazio percorso in una unità di tempo, in questo moto uniforme nella prima unità di tempo si percorrerà lo spazio u ,

nella seconda unità di tempo lo stesso spazio u : dunque in due unità di tempo si percorrerà lo spazio $2u$. Nella terza unità di tempo si percorrerà lo spazio u , dunque in tre unità di tempo lo spazio $3u$; perciò nelle t unità di tempo si percorrerà lo spazio ut : questo spazio si è detto s : dunque $s = ut$. Ci ricorderemo, che in questa equazione la t è il numero astratto, ed u è il numero concreto della stessa natura del prodotto s .

5. **Moto uniformemente accelerato** è quello, nel quale la forza agisce con impulsi tutti della stessa intensità. Egli è evidente, che essendo la forza costante, e agendo ad uguali intervalli, come avviene nella natura, nel moto attuale nello stesso tempo si acquisterà dal mobile lo stesso grado di velocità, e questa velocità potrà rappresentare la forza, perchè sarà proporzionale al suo impulso. Infatti sia c la celerità comunicata da un impulso, ed n il numero d'impulsi che entrano nella data unità di tempo, la celerità C totale sarà nc . Ora n è costante, dunque C è proporzionale a c .

6. Dopo ciò si muova un punto materiale con moto uniformemente accelerato in un tempo t , al termine del quale si trovi colla velocità u , e sia φ l'intensità costante della forza. Essendo φ (§. 5.) la velocità comunicata al mobile in una unità di tempo, nella prima unità di tempo avrà la velocità φ , nella seconda acquisterà la stessa velocità φ , che unita all' antecedente ci darà 2φ . La velocità della terza unità di tempo essendo pure φ , avremo che il mobile in tre unità di tempo avrà velocità 3φ : perciò in t unità avrà la velocità φt ; ora si è detta u questa velocità; dunque $u = \varphi t$.

7. **Equazioni generali del moto.** Supponiamo ora un moto qualunque ed in un tempo t un punto materiale abbia acquistato la velocità u . Essendo un moto qualunque, nell'istante seguente sarà cambiata questa velocità.

Per quanto siano prossimi questi due istanti, quello cioè della velocità u , e quello del suo cambiamento, il loro intervallo sarà assegnabile, perchè si parla di fatto della natura; ma il dt è minore d'ogni assegnabile, quindi si potrà fra essi interporre, ed essendo questo tratto di tempo anteriore al cambiamento, in esso proseguirà ad aver luogo la stessa velocità u , ossia il moto sarà uniforme; ma in questo tempo infinitesimo dt non si può percorrere che lo spazio infinitesimo ds : abbiamo perciò moto uniforme di tempo dt , di velocità u , e di spazio ds : dunque avremo (§. 4) $ds = udt$.

8. Si supponga ora che muovendosi il mobile con un moto qualunque dopo il tempo t si trovi colla velocità u sentendo l'impulso rappresentato da φ . Essendo φ una funzione, secondo l'indole del calcolo differenziale degli infinitesimi rimane costante pel tratto dt : quindi la velocità acquistata in questo (§. 6.) sarà φdt , ma questa velocità non può essere che infinitesima, quindi $du = \varphi dt$.

9. **Riflessioni sulle avute equazioni generali.** Le due equazioni (§. 8,9)

$$(1) \quad ds = udt, \quad du = \varphi dt.$$

essendo per un moto qualunque, possono essere per uno stesso moto. Queste poi contengono i quattro elementi del moto, tre costituenti il moto cioè lo spazio, la velocità, ed il tempo, e l'altro la causa del moto, cioè la forza.

10. Le dette formole poi sono necessarie e sufficienti. Sono necessarie, perchè se manca la seconda manca la forza, e se manca la prima, manca lo spazio. Sono poi sufficienti, perchè gli elementi primari, dei quali gli altri sono funzioni, sono lo spazio, ed il tempo. Infatti la velocità è lo spazio percorso in un dato tempo, e la forza è la velocità comunicata, quindi come questa si forma dallo spazio, e dal tempo, così l'altra. Essendo dunque dei quattro ele-

menti due gl'indipendenti, sono sufficienti due equazioni a collegarli tutti e quattro.

11. Equazioni per ogni teorema e problema di moto. Nella generalità dei teoremi, e problemi sul moto si suol dare la forza come la causa, e regolatrice del moto, e questa si suol dare in spazio. Così la legge generale della natura è, che la forza sia in ragione inversa del quadrato della distanza del mobile dal punto attraente, o dall'origine della forza; e poi la forza è la velocità, o lo spazio in una unità di tempo.

12. Dandosi la forza in funzione di spazio l'equazione $du = \varphi dt$ avrebbe tre variabili: quindi è necessario dalle due date equazioni (1) (§. 10) avere un'equazione fra la forza lo spazio ed il tempo o fra la forza lo spazio e la velocità.

13. Se fra l'equazioni (1) si elimina il dt avremo

$$(2) \quad u du = \varphi ds.$$

14. Dalla seconda delle (1) avendosi $\varphi = \frac{du}{dt}$, se in questa si ponga il valore di $u = \frac{ds}{dt}$, ricavato dalla prima avremo

$$\varphi = d. \frac{\frac{ds}{dt}}{dt}.$$

Per eseguire la differenziazione si assuma per variabile principale il tempo avremo $\varphi = \frac{d^2s}{dt^2}$. L'equazioni (2), (3) sono le richieste. (§. 11).

CAPO II.

Moto uniformemente accelerato, e ritardato.

15. Nel moto uniformemente accelerato la forza è costante. Si dica dunque g , avremo (§. 6.) $\frac{d^2s}{dt^2} = g$. Per inte-

grarla si ponga sotto la forma $\frac{d^2s}{dt^2} = gdt$. Integrando avremo

$$\frac{ds}{dt} = gt + C.$$

Si porti l'integrale al principio del moto. Si avverta per ciò, che $\frac{ds}{dt}$ è la velocità, (§. 10): dicendo dunque questa c al principio del moto, ove facciamo nullo il tempo, avremo $c = C$, quindi

$$(a) \quad \frac{ds}{dt} = gt + c, \text{ e } ds = gtdt + cdt.$$

Integrando di nuovo sarà $s = \frac{1}{2}gt^2 + ct$, ove non è costante, perchè poniamo ad un tempo $t = 0$, $s = 0$.

16. Se nella (a) si pone u invece di $\frac{ds}{dt}$, abbiamo l'altra equazione del moto uniformemente accelerato (b), $u = gt + c$.

17. Se tra (a), (b) si elimina la t avremo (c) $u^2 = 2gs + c^2$.

18. Supponendo nelle equazioni (a), (b), (c) la velocità iniziale zero avremo

$$u = gt, \quad u^2 = 2gs, \quad s = \frac{gt^2}{2}.$$

19. Da queste si ricava, che le velocità crescono come i tempi; e gli spazi come i quadrati dei tempi e delle velocità.

20. Gli spazi descritti in uguali e successivi intervalli di tempo, cominciando dal principio del moto seguono la ragione de' numeri dispari 1, 3, 5, 7 ec. Infatti nell'equazione

$$s = \frac{gt^2}{2} \text{ si faccia successivamente } t = 1, t = 2, t = 3 \text{ ec.}$$

avremo

$$s = \frac{g}{2}, s' = \frac{g}{2} \cdot 4, s'' = \frac{g}{2} \cdot 9, s''' = \frac{g}{2} \cdot 16 \text{ ec.}$$

quindi

$$s' - s = \frac{g}{2} \cdot 3, s'' - s' = \frac{g}{2} \cdot 5, s''' - s'' = \frac{g}{2} \cdot 7 \text{ ec.}$$

21. Se il mobile ha percorso nel tempo t lo spazio s con moto eguabilmente accelerato, ed ha acquistata la velocità u , ed indi per ugual tempo prosegue a muoversi con moto eguabile, e colla velocità acquistata u , esso descriverà lo spazio doppio del primo. Infatti secondo l'ipotesi (§. 19)

$$u^2 = 2gs, \text{ ed } u = gt$$

pel moto eguabilmente accelerato. Moltiplicando la seconda per u avremo $u^3 = gut$: dunque per la prima $ut = 2s$. Se S sia lo spazio percorso con moto uniforme nel tempo t , e colla velocità u , sarà $S = ut$: dunque $S = 2s$.

22. **Valore della forza nel moto uniformemente accelerato.** La misura della forza costante g si ottiene quando si conosca lo spazio descritto dal mobile in un dato tempo t , e ciò dalla equazione $g = \frac{2s}{t^2}$. (§. 19).

23. Dalla sperienza risulta, che nella caduta dei gravi gli spazi percorsi sono come i quadrati dei tempi: quindi (§. 20) questo moto è uniformemente accelerato, cioè la gravità costante.

24. **Valore della gravità.** Dalla esperienza risulta ancora, che un grave liberamente cadendo percorre in un secondo lo spazio di piedi 15.098 di Parigi, o di metri 4.9044. Si prenda ora $t = 1''$ ed $s = 15 \cdot 1$, o $s = 4 \cdot 9$, avremo dalla equazione $s = \frac{gt^2}{2}$, poendovi i valori antecedenti,

$$g = 30 \cdot 2, \text{ o } g = 9 \cdot 8.$$

25. Volendosi dunque la velocità acquistata dal grave cadente per una data altezza s , o sia, come sogliono chiamarla, la *velocità dovuta all'altezza s* , avremo

$$u = \sqrt{2gs} = 4.43\sqrt{s}.$$

26. **Considerazione sul valore della gravità.** Considerando il valore di $g = 30.2$ si vede esser doppio del 15.1, spazio che il mobile percorre con moto uniformemente accelerato in un secondo, e ciò deve essere. Infatti la forza g è velocità comunicata da tanti impulsi (§. 5) quanti entrano in una unità di tempo, che nel nostro caso è un secondo. Ora con questa velocità proseguendo a muoversi il corpo percorre uno spazio doppio (§. 22), e la forza è sempre una velocità (proem. 11), o uno spazio percorso uniformemente in una data unità di tempo, nel nostro caso in un secondo.

27. **Equazioni del moto uniformemente ritardato.** Per questo moto s'intende quello, nel quale la forza agisce con impulsi uguali contrariamente alla velocità, colla quale il mobile ha cominciato il suo moto. Per questo moto basterà di far negativa la g nelle formole delli (§. 16,17): avremo perciò

$$(a') u = c - gt, \quad (b') u^2 = c^2 - 2gs,$$

$$(c') s = ct - \frac{gt^2}{2}.$$

28. **Durata del moto uniformemente ritardato.** Per trovare la durata di questo moto, e lo spazio scorso fino all'estinzione della velocità impressa c , basterà fare $u=0$ nelle equazioni antecedenti; perchè il moto dato durerà finchè esiste la velocità del mobile. Avremo così per lo spazio e tempo domandato $t = \frac{c}{g}$, $s = \frac{c^2}{2g}$. Ora questo tempo e

questo spazio sono appunto quegli stessi, ne' quali il mobile partendo dalla quiete con moto uniformemente accelerato acquista la velocità c . Laonde se dopo spenta la velocità impressa, la forza ritardatrice prosegue ad agire, il mobile ricalcherà la stessa traccia, e tornerà in tempo uguale al punto, ove partì; dove giunto avrà riacquisita in senso opposto la velocità iniziale c .

29. Proprietà del moto uniformemente ritardato.
Nel moto uniformemente ritardato le velocità sono come i tempi, che restano fino alla cessazione del moto. Infatti abbiamo

$$u = c - gt ;$$

dicendo T il tempo della durata del moto sarà

$$T = \frac{c}{g} \text{ (§. 19): dunque } c = gT, \text{ ed } u = g(T - t) .$$

Nel moto uniformemente ritardato gli spazi, che restano a descriversi fino alla cessazione del moto sono come i quadrati delle velocità, e dei tempi, che rimangono fino alla cessazione del moto. Infatti dicendo S lo spazio descritto nella durata del moto avremo (§. 30) $S = \frac{c^2}{2g}$ po-

nendo questo valore in (§. 28) $s = \frac{c^2}{2g} - \frac{u^2}{2g}$ sarà

$$s = S - \frac{u^2}{2g}, \text{ ed } S - s = \frac{u^2}{2g},$$

che è la prima parte della proposizione. L'altra è da se evidente, perchè (§. 30) le velocità sono come i tempi che rimangono.

CAPO III.

Altri moti rettilinei.

30. Sia il corpo attratto da una forza, che vari come le distanze dal centro attraente. Sarà $\varphi = mx$ dicendo x la distanza del detto centro. L'equazione $\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi$ nel nostro

caso diventerà (1) $-\frac{d^2x}{dt^2} = mx$: ove il differenziale secondo dello spazio è negativo, perchè è diminutivo delle distanze x . Per integrare l'equazione (1) si moltiplichì per $2dx$ avremo $\frac{2dx d^2x}{dt^2} = -2mxdx$. Integrando nell'ipotesi di dt costante avremo (2) $\frac{dx^2}{dt^2} = -mx^2 + C$. La $\frac{dx}{dt}$ è la velocità u .

Per determinare la costante si supponga, che il corpo parta dalla quiete alla distanza a dal centro; avremo $0 = -ma^2 + C$.

Sottraendo questa dalla (2) sarà (3) $\frac{dx^2}{dt^2} = m(a^2 - x^2)$: cioè

(4) $u^2 = m(a^2 - x^2)$, una delle due formole del moto.

31. Per fare un'altra integrazione nella (3) si ponga sotto la forma

$$dt = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{(a^2 - x^2)}} = \frac{1}{\sqrt{m}} \cdot \frac{\frac{-dx}{a}}{\sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)}}$$

Si è posto il segno meno nella radice di dx^2 , perchè all'aumento del tempo corrisponde decremento della distanza

dal centro. Dopo ciò avremo $t = \frac{1}{\sqrt{m}} \arccos\left(\frac{x}{a}\right)$: ove

non si pone costante, perchè portando l'integrale al principio del moto, ove $t = 0$, $x = a$, l'equazione si riduce a zero. Si supponga, che il corpo arrivi al centro: in questo

$x = 0$, quindi $T = \frac{1}{\sqrt{m}} \frac{\pi}{2}$, ove T è il tempo totale del moto, e $\frac{\pi}{2}$ è il quadrante. Questo risultamento è indipendente dalla distanza dal centro attraente del punto di partenza: quindi, i corpi che partono da diverse distanze giungono al centro allo stesso tempo.

32. Si muova un corpo attratto da un centro con forza, che agisca in ragione inversa del quadrato della distanza dal centro attraente: sarà $\varphi = \frac{m}{x^2}$: quindi

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{m}{x^3} : \frac{2dx dx}{dt^2} = -\frac{2m dx}{x^3} : \frac{dx^2}{dt^2} = \frac{2m}{x} + C.$$

Parta il mobile da un punto di distanza a dal centro essendo in quiete, avremo

$$0 = \frac{2m}{a} + C: \text{quindi (a) } \frac{dx^2}{dt^2} = 2m \left(\frac{a-x}{x} \right), \text{ ed } u^2 = 2m \left(\frac{a-x}{x} \right).$$

Per aver l'altra equazione del moto l'equazione (a) si ponga sotto la forma

$$dt = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot -dx \sqrt{\frac{x}{a-x}} = \frac{1}{\sqrt{2m}} \cdot \frac{-x dx}{\sqrt{(ax-x^2)}}.$$

Questa s' integra facilmente se si toglie il termine ax nel denominatore facendo $x = z + \frac{a}{2}$.

CAPO IV.

Moto verticale de' gravi nei mezzi resistenti.

33. La resistenza dell'aria, e di ogni altro mezzo fluido in pari circostanza è proporzionale al quadrato della velocità del corpo, che in esso si muove. Quindi questa forza

ritardatrice può esprimersi per u^2 moltiplicato per un coefficiente costante, che per comodo di calcolo si potrà esprimere con gm^2 , onde sia la forza ritardatrice gm^2u^2 . Questo coefficiente poi dipende dalla figura del corpo, e dal rapporto del suo peso specifico a quello del fluido, onde il valore di m è lo stesso per uno stesso corpo, e per uno stesso fluido, ma cangia nei diversi corpi, e nei mezzi diversi.

34. Equazioni del moto verticale d'un grave che cade in un mezzo resistente. È evidente, che la forza acceleratrice sarà $g - gm^2u^2$; fatto $\varphi = g - gm^2u^2$ nelle equazioni (§. 9,13) $\varphi dt = du$, $\varphi ds = u du$, avremo

$$gdt = \frac{du}{1 - m^2u^2}, \quad gds = \frac{u du}{1 - m^2u^2}.$$

La seconda ci dà $gs = -\frac{1}{2m^2} L(1 - m^2u^2) + C$. Al principio del moto sia $s = 0$, $u = 0$, quindi avremo

$$C = 0, \quad \text{ed} \quad (1) \quad s = \frac{1}{2gm^2} L \frac{1}{1 - m^2u^2}.$$

Per integrare l'altra equazione si prenda la frazione

$$\frac{1}{1 - m^2u^2} = \frac{1}{(1 - mu)(1 + mu)},$$

e si vede facilmente essere

$$\frac{1}{(1 - mu)(1 + mu)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - mu} + \frac{1}{1 + mu} \right),$$

dunque $gdt = \frac{1}{2} \left(\frac{du}{1 - mu} + \frac{du}{1 + mu} \right)$, ed integrando

$$gt = \frac{1}{2m} [L(1 + mu) - L(1 - mu)] + C.$$

Al principio del moto facendosi $t = 0$, $u = 0$, si troverà $C = 0$, quindi $gt = \frac{1}{2m} L \frac{1+mu}{1-mu}$, e passando dai logaritmi ai numeri (2) $u = \frac{1}{m} \cdot \frac{e^{2gmt} - 1}{e^{2gmt} + 1}$. Eliminando u fra le (1), (2) avremo

$$s = \frac{1}{gm^2} L \frac{1}{2} (e^{2gmt} + e^{-2gmt}).$$

Considerando l'equazione (2) si vede, che vi può essere un tempo tanto grande, che l'unità sia trascurabile rispetto e^{2gmt} . In questo caso $u = \frac{1}{m}$, cioè il moto si riduce ad uniforme. Si vede chiaro, che a quel limite il e^{2gmt} si avvicina tanto più presto, quanto è più grande il coefficiente m .

35. Caso della gravità ritardatrice. In questo la g è negativa, onde avremo $\phi = -g(1 + m^2u^2)$: quindi sarà

$$gdt = \frac{-du}{1+m^2u^2}, \quad gds = \frac{-udu}{1+m^2u^2}.$$

Queste equazioni s'integrano immediatamente, ed avremo

$$gt = -\frac{1}{m} \text{arc.tang.}(=mu) + C;$$

$$gs = -\frac{1}{2m^2} L(1 + m^2u^2) + C.$$

Al principio del moto $s = 0$, $t = 0$, e la velocità iniziale $u = c$: quindi

$$(a) \quad gt = \frac{1}{m} [\text{arc.tang.}(=mc) - \text{arc.tang.}(=mu)],$$

$$\text{e (b) } gs = \frac{1}{2m^2} L \frac{1+m^2c^2}{1+m^2u^2}.$$

Dalla (a) ricavando il valore di u avremo

$$u = \frac{1}{m} \cdot \frac{mc - \text{tang. } gmt}{1 - mctang. gmt}.$$

Eliminando la u fra questa e la (b) avremo

$$s = \frac{1}{gm^2} L (\cos. gmt + m \text{sen. } gmt).$$

36. La durata di questo moto, e l'altezza della salita si ottengono ponendo in queste equazioni $u = 0$, con che

$$t = \frac{1}{gm} \text{arc.tang.}(=mc); s = \frac{1}{2gm^2} L (1 + m^2c^2).$$

CAPO V.

Del moto curvilineo.

37. **Equazioni generali del moto curvilineo.** Un punto materiale si muova secondo una curva qualunque, che perciò si chiama *traiettoria*, e dopo un tempo t avendo percorso la linea s si trovi colla velocità u : avremo le formole superiori (§. 9,14), che si riconcentrano nell'unica

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \varphi.$$

Se X, Y, Z siano le componenti di φ secondo tre assi ortogonali, e dell'estremo di s , ove è la velocità u , siano x, y, z le coordinate; come la φ fa percorrere al mobile lo spazio ds , così le dette componenti gli faranno percorrere rispettivamente dx, dy, dz : quindi avremo similmente

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

38. **Uso delle equazioni generali.** Date le X, Y, Z rispettivamente in funzioni delle x, y, z , colla prima integrazione delle equazioni (1) avremo $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt}$: queste sono le velocità secondo i tre assi, quindi da queste potremo avere la velocità u secondo la curva che sarà

$$(2) \quad u = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

Potremo avere ancora dx, dy, dz , e quindi

$$(3) \quad ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}.$$

In questa posti i valori di dx, dy, dz dati in differenziale di tempo, integrando potremo avere lo spazio dato in tempo, e così colle equazioni (2), (3) avremo le due solite equazioni fra i quattro elementi del moto.

39. Facendo la seconda integrazione nelle equazioni (1) avremo le coordinate x, y, z date in tempo, per le quali ad ogni istante potremo avere il luogo del mobile. Se fra queste elimineremo il tempo avremo due equazioni della linea, che il mobile percorre, che saranno l'equazioni delle sue proiezioni sopra due piani.

CAPO VI.

Moto dei gravi proiettati nel vuoto.

40. **Equazioni del moto dei gravi proiettati.** Questo moto è il risultato di due, l'uno uniforme, e l'altro uniformemente accelerato. Infatti sia un punto materiale gittato non verticalmente con una celerità v , e poi abbandonato alla gravità g . Siano i tre assi ortogonali; l'asse delle y sia verticale all'insù contrariamente alla gravità, e gli altri due assi orizzontali. Le forze delle formole (1) (§. 37) sono continuate;

cioè ad un tempo qualunque t : quindi

$$X = 0, Y = -g, Z = 0:$$

ove la g è negativa, perchè tende a diminuire le y , mentre la Y tende ad aumentarle; perciò avremo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -g, \frac{d^2z}{dt^2} = 0.$$

41. Integrazioni delle equazioni. Integriamo la prima e la terza, ed avremo $\frac{dx}{dt} = c, \frac{dz}{dt} = c'$, essendo c, c' le costanti arbitrarie. Integrando un'altra volta avremo

$$x = ct + m, z = c't + m',$$

ed eliminando da questa il t avremo un'equazione della forma $z = Ax + B$: quindi la traiettoria del mobile sul piano delle xz ha una proiezione rettilinea, perciò è una linea a semplice curvatura.

42. Essendo ciò si ammetta il solo piano delle x orizzontali, e delle y verticali all'insù, avremo così le sole due equazioni (a) $\frac{d^2x}{dt^2} = 0, \frac{d^2y}{dt^2} = -g$. Si supponga ora, che la velocità del getto v faccia coll'asse delle x l'angolo α , saranno $v \cos. \alpha, v \sin. \alpha$ le sue componenti secondo l'asse delle x , e delle y . Integrando l'equazioni (a) avremo

$$(b) \quad \frac{dx}{dt} = c, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + c'.$$

I primi membri esprimono le velocità secondo gli assi delle x , e delle y : portando dunque queste equazioni al principio del moto sarà $t = 0$, e $\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}$ saranno le velocità iniziali, $v \cos. \alpha, v \sin. \alpha$; perciò avremo

$$\frac{dx}{dt} = v \cos. \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + v \sin. \alpha.$$

43. **Natura della curva dei gravi proiettili.** Integrando queste equazioni avremo

$$(c) \quad x = v \cos \alpha, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + t v \sin \alpha,$$

nelle quali non si aggiunge costante, perchè al principio del moto $t = 0$, $x = 0$, $y = 0$. Se tra l'equazioni (c) si elimina il tempo avremo

$$(d) \quad y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2,$$

che è l'equazione della traiettoria. Si vede, che questa è l'equazione della parabola avendo una coordinata quadrata, e l'altra alla prima potenza.

44. Ma si può avere la nota equazione all'asse, o diametro delle coordinate rettangole. Per questo, ed altro scopo si cerchino le coordinate x , y del punto culminante della curva: perciò si assoggetti l'equazione (d) alle condizioni del massimo, si troverà, che le coordinate orizzontale h , e k verticale del cercato punto sono

$$(e) \quad h = \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}, \quad k = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}.$$

Si ponga

$$x = \frac{v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g} - y', \quad y = \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g} - x',$$

e si sostituiscano in (d) avremo dopo le riduzioni

$$y'' = \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g} \cdot x':$$

equazione cercata.

45. In questa il parametro è $\frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g}$: quindi la distanza della direttrice dal vertice della parabola sarà

$$\frac{1}{4} \cdot \frac{2v^2 \cos^2 \alpha}{g} = \frac{v^2 \cos^2 \alpha}{2g}$$

cui aggiungendo l'ordinata $k = \frac{v^2 \text{sen.}^2 \alpha}{2g}$ dal vertice, il risultamento $\frac{v^2}{2g}$ esprimerà la distanza della direttrice dall'orizzontale condotta dal punto del getto. Si vede, che questa distanza è indipendente dall'angolo di proiezione. La $\frac{v^2}{2g}$ è l'altezza (§. 28.) cui il mobile giungerebbe se colla velocità v fosse gittato in alto.

46. **Ampiezza del getto.** Se nella equazione (d) si faccia $y = 0$ si avrà

$$(f) \quad x = \frac{2v^2 \text{sen.} \alpha \cos. \alpha}{g},$$

che è la distanza fra il punto del getto, ed il punto dell'orizzontale condotta da esso, dove il corpo lanciato ritorna su d'essa. La quantità (f) si chiama *ampiezza del getto*.

47. La (f) si può porre sotto la forma $\frac{v^2 \text{sen.} 2\alpha}{g}$. Si vede, che questa ha il massimo valore quando $2\alpha = 90^\circ$, o $\alpha = 45^\circ$, e che in tal caso la detta ampiezza è $\frac{v^2}{g}$; cioè doppia dell'altezza dovuta alla velocità del getto.

48. Poichè ponendo invece di 2α , $90^\circ \pm \alpha$ abbiamo lo stesso valore di $\frac{v^2 \text{sen.} 2\alpha}{g}$: quindi l'elevazioni del getto sull'orizzontale ad uguali intervalli da 45° danno la stessa ampiezza.

49. Se il corpo è gittato colla stessa velocità ma con direzioni diverse, la posizione della direttrice delle diverse parabole è la stessa. Per avere il luogo geometrico dei lor vertici basterà eliminare α dalle equazioni (e) (§. 44): con ciò avremo

$$4k^2 + k^2 - \frac{2v^2}{g} k = 0 :$$

ossia

$$h^2 = 4 \left(\frac{v^2}{2g} k - k^2 \right).$$

Equazione d'una ellisse di semiasse minore $\frac{v^2}{4g}$ secondo l'asse delle y , e di semiasse maggiore $\frac{v^2}{2g}$ secondo l'asse delle x , che è doppio del primo.

50. **Equazione dell'involupante.** Se nell'equazione

$$(m) \ y = x \tan \alpha - \frac{g}{2v^2 \cos^2 \alpha} x^2$$

supponendo variabile α , si differenzi si troverà

$$(n) \ \tan \alpha = \frac{v^2}{gx}.$$

Questo risultamento mi dà l'ascissa del punto della traiettoria infinitamente prossima alla proposta comune con questa; e se tra (m), ed (n) si elimini α avremo il luogo geometrico, o la curva che passa per tutti i punti di unione delle infinite parabole, che si hanno dal supporre successivamente variabile l'inclinazione qualunque del getto. Diremo *involupante* questa curva. Fatta la detta eliminazione si troverà

$$(r) \ y = \frac{v^2}{2g} - \frac{gx^2}{2v^2}.$$

Se si dica a l'altezza dovuta alla velocità v del getto, per lo chè sarà $v^2 = 2ga$, l'equazione (r) diverrà $x^2 = 4a(a - y)$: quindi l'involupante è una parabola, che ha per asse quello delle y , ed il suo vertice è dalla parte delle y positive ad una distanza a dall'origine. Essa sega l'asse delle x in due punti distanti dall'origine di una quantità uguale a $2a$.

51. Si domanda l'angolo del getto per colpire un punto dato. Siano x' , y' le coordinate di questo punto, dovranno queste soddisfare all'equazione (m), (§. 50): quindi sarà

$$y' = x' \operatorname{tang} \alpha - \frac{gx'^2}{2v^2 \cos^2 \alpha}.$$

Si ha

$$\frac{1}{\cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha = 1 + \operatorname{tang}^2 \alpha.$$

Si ponga questo valore nell'equazione antecedente, avremo ponendovi $2ga$ invece di v^2

$$(p) \operatorname{tang}^2 \alpha - \frac{4a}{x'} \operatorname{tang} \alpha + \frac{4ay'}{x'^2} + 1 = 0,$$

e si trovi il valore di $\operatorname{tang} \alpha$, avremo ponendo $\frac{v^2}{2g}$ per a

$$(q) \operatorname{tang} \alpha = \frac{v^2 + \sqrt{v^4 - 2v^2 gy' + g^2 x'^2}}{gx'}.$$

Se $v^4 > 2v^2 gy' + g^2 x'^2$ abbiamo due inclinazioni del getto all'orizzonte per colpire il punto, e potrà servire la minore per urtare l'oggetto e la maggiore per comprimerlo, o sfondarlo.

52. Se $v^4 < 2v^2 gy' + g^2 x'^2$ è impossibile di colpire lo scopo essendo la radice immaginaria. Se finalmente

$$v^4 = 2v^2 gy' + g^2 x'^2$$

si ha una sola direzione del getto per colpire lo scopo.

53. Se si confronta questa equazione colla (r) (§. 50) si vede, che lo scopo dato e sulla parabola involupante, e per conseguenza il problema è impossibile se il punto dato è fuori di questa curva. Vi saranno due soluzioni se il punto è dentro, ed una sola se è nella involupante. In questo ultimo caso egli è chiaro, che il mobile deve essere

lanciato in guisa da descrivere una parabola che tocchi l'inviluppante in questo punto, ciò che si ricava dal valore

di $\tan \alpha$ che è $\frac{v^2}{gx'}$.

54. Relazione degli angoli, sotto i quali con una velocità iniziale data si può colpire un dato scopo. Siano α' α'' questi angoli, per le note relazioni fra le radici, ed i coefficienti d'una equazione avremo per l'equazione (p) (§. 51)

$$\tan \alpha' + \tan \alpha'' = \frac{4\alpha}{x'},$$

$$\tan \alpha' \cdot \tan \alpha'' = \frac{4y'\alpha}{x'^2} + 1$$

da queste

$$\frac{\tan \alpha' + \tan \alpha''}{1 - \tan \alpha' \tan \alpha''} = \tan (\alpha' + \alpha'') = -\frac{x'}{y'} = -\cot \varepsilon :$$

dicendo ε l'angolo fatto coll'orizzonte dalla retta condotta dal luogo del getto allo scopo. Dall'antecedente equazione si ricava, che $-\varepsilon$ è complemento di $\alpha' + \alpha''$, quindi

$$\alpha' + \alpha'' - \varepsilon = 90^\circ, \text{ ed } \alpha' - \varepsilon = 90^\circ - \alpha''.$$

Da questa equazione si vede, che le due direzioni dei getti, che colpiscono lo stesso scopo fanno angoli uguali colla retta che va allo scopo, e colla verticale, e per conseguenza fanno angoli uguali colla bisettrice dell'angolo fatto dalla detta retta e la verticale.

55. Caso in cui i due angoli si riducono ad uno solo. In questo caso è nulla la quantità sotto il vincolo radicale dell'equazione (p) (§. 51); risolta per $\tan \alpha$: onde avremo

$$(r) \quad \frac{4a^2}{x'^2} - \frac{4ay'}{x'^3} - 1 = 0,$$

e quindi pel valore unico di α , $\text{tang.}\alpha = \frac{2a}{x'}$. Abbiamo

poi come sopra $\frac{y'}{x'} = \text{tang.}\epsilon$, quindi l'equazione (r) diventa $\text{tang}^2.\alpha - 2\text{tang.}\epsilon \text{ tang.}\alpha = 1$: Compiendo il quadrato del primo membro, ed avvertendo essere

$$1 + \text{tang}^2.\epsilon = \frac{1}{\cos^2.\epsilon}, \text{ si avrà } \text{tang.}\alpha - \text{tang.}\epsilon = \frac{1}{\cos.\epsilon},$$

che si riduce a $\text{sen.}\alpha \cos.\epsilon - \cos.\alpha \text{sen.}\epsilon = \cos.\alpha$, ossia $\text{sen.}(\alpha - \epsilon) = \text{sen.}(90^\circ - \alpha)$, che ci dice, essere la retta di proiezione la bisettrice dell'angolo formato dalla verticale, e dalla retta condotta allo scopo.

56. Angolo della più grande portata sopra un piano inclinato. La detta retta bisettrice è quella della più grande portata sopra un piano diretto allo scopo. Infatti la portata sul detto piano inclinato è rappresentata da $\frac{x'}{\cos.\epsilon}$, quindi essa sarà un massimo con x' . Se si prende il differenziale dell'equazione (§. 50) ponendovi a in luogo di $\frac{v^2}{2g}$ ossia dell'equazione

$$y' = x' \text{ tang.}\alpha - \frac{x'^2}{4a \cos^3.\alpha}$$

supponendo variabili x' , ed α , si uguagli a zero, e ponendovi $\text{tang.}\epsilon$ in luogo di $\frac{y'}{x'}$, avremo

$$\cos.(\alpha - \epsilon) \cos.\alpha - \text{sen.}(\alpha - \epsilon) \text{sen.}\alpha = 0$$

d'onde $\text{tang.}(\alpha - \epsilon) \text{ tang.}\alpha = 1$. Di qui

$$\alpha - \epsilon + \alpha = 90^\circ, \text{ e } \alpha = \frac{1}{2} (90^\circ + \epsilon).$$

quindi la retta del getto, che da la più gran portata è la bisettrice dell'angolo fatto dalla verticale, e dalla retta che va allo scopo.

57. Velocità del proiettile in un punto qualunque. Questa velocità è la risultante delle due velocità rettangolari (§. 42)

$$\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} : \text{ dunque } u^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \\ = v^2(\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha) - 2g(vt \sin \alpha - \frac{1}{2}gt^2);$$

e poichè (§. 43) $y = -\frac{1}{2}gt^2 + vt \sin \alpha$, si avrà $u^2 = v^2 - 2gy$. Essendo α l'altezza dovuta alla velocità v , sarà $u^2 = 2g(\alpha - y)$.

58. Si vede da questa equazione, che la velocità dipende dall'altezza y del proiettile, e che per conseguenza si fa tanto minore quanto il proiettile è più elevato; quindi la velocità minima è nel punto culminante. In questo punto l'ordinata è (§. 44) $\frac{v^2 \sin^2 \alpha}{2g}$: quindi

$$u = \sqrt{v^2 - 2gy} = \sqrt{v^2 - v^2 \sin^2 \alpha} = v \cos \alpha,$$

che è la componente orizzontale della velocità v .

59. Durata del moto. La prima delle equazioni (e) (§. 43) è $x = vt \cos \alpha$, d'onde $t = \frac{x}{v \cos \alpha}$. La durata totale del getto si avrà se in questa equazione si ponè la portata (§. 46) $\frac{2v^2 \sin \alpha \cos \alpha}{g}$, perchè finirà il moto quando il proiettile sia caduto sul suolo: dicendo dunque T questa durata si avrà $T = \frac{2 \sin \alpha}{g}$. Supponiamo la più gran portata che diremo X : si è trovato (§. 47) $X = 2\alpha$ cioè due volte l'altezza dovuta alla velocità del getto, ed inoltre $v = \sqrt{2ga}$: dunque $v = \sqrt{gX}$: essendò poi $\alpha = 45^\circ$ sarà $\sin \alpha = \frac{1}{\sqrt{2}}$: dunque in questo caso $T = \sqrt{\left(\frac{2X}{g}\right)}$.

60. Essendo data la posizione dello scopo e l'angolo del getto si trova la velocità iniziale. Abbiamo

$$(\S. 56) \quad y' = x' \tan \alpha - \frac{x'^2}{4 \cos^2 \alpha}.$$

Qui è dato α , come anche x' , y' . e si deve trovare a . Dalla equazione antecedente ponendovi $\tan \varepsilon$ invece di $\frac{y'}{x'}$, avremo

$$a = \frac{x'}{4(\tan \alpha - \tan \varepsilon) \cos^2 \alpha}.$$

Ora

$$\begin{aligned} & 4(\tan \alpha - \tan \varepsilon) \cos^2 \alpha \\ &= 4(\sin \alpha \cos \varepsilon - \sin \varepsilon \cos \alpha) \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon} \\ &= 4 \sin(\alpha - \varepsilon) \frac{\cos \alpha}{\cos \varepsilon}; \end{aligned}$$

quindi finalmente

$$a = \frac{x'}{4 \sin(\alpha - \varepsilon)} \cdot \frac{\cos \varepsilon}{\cos \alpha},$$

che sarà positivo o negativo secondo che lo scopo sarà al di sopra, o al di sotto dell'orizzontale condotta dalla bocca da fuoco.

CAPO VII.

Gravi proiettili nei mezzi resistenti.

61. **Considerazioni teoriche della resistenza del fluido.** Consideriamo il caso d'un fluido in riposo, nel quale un corpo cammini parallelamente ed uniformemente. Sia V la velocità del corpo, ds lo spazio percorso durante un tempo infinitesimo dt . Sembra evidente, che a circostanze d'altronde uguali la somma delle molecole deviate o spinte sia tanto più grande quanto più di spazio occu-

perà il corpo nel senso normale al movimento, e che nominando S la proiezione di questo corpo sopra il piano normale alla direzione del moto, la porzione dello spazio che sarà successivamente occupata dal corpo in luogo del fluido spostato sarà proporzionale ad S .

62. Questo spazio crescerà come lo spazio de descritto in ciascuno degli istanti dt . Quindi, se si dica Q il volume totale, si vedrà, che Q sarà proporzionale ad Sde . Da un altro lato il corpo muovendosi nel fluido imprime alle molecole del volume Q una velocità tanto più grande per quanto la sua è maggiore della velocità loro, per conseguenza la velocità di queste molecole cresce come V , e la loro forza viva come V^2 . Nominando δ il peso dell'unità del volume del fluido, il peso del volume Q del fluido sarà $Q\delta$: quindi la forza viva, che gli è impressa nel tempo dt può essere riguardata come proporzionale a $\frac{\delta S de V^2}{g}$ essendo g la gravità.

63. Il corpo avendo così comunicato questa forza viva al fluido, questo ha opposto necessariamente al moto uniforme del corpo una resistenza totale R , che restando la medesima per la lunghezza infinitesima de avrà, distrutto una quantità di azione Rde proporzionale a $\frac{\delta S V^2 de}{g}$, o che è lo stesso, Rde sarà proporzionale a $\frac{\delta S V^2 de}{g}$: ossia R sarà proporzionale a $\frac{\delta S V^2}{2g}$ o a δSa , esprimendo per a l'altezza dovuta alla velocità V .

63. Si può ammettere, che il rapporto di R a

$$\delta Sa = \frac{\delta S V^2}{2g}$$

in un medesimo fluido, o in fluidi differenti con velocità V rigorosamente uniformi, quantunque distinti; e per un medesimo corpo, o per corpi simili, è costante.

Si rappresenti con k questo rapporto costante, il quale, in ciascun caso, dovrà esser dato dall'esperienza e dipenderà dalla forma del corpo e da qualche altra circostanza. Lorchè il coefficiente k sarà noto, avremo pel calcolo della resistenza

$$R = k\delta S \frac{V^2}{2g}, \text{ ovvero } R = k\delta S A.$$

Di qui risulta che la resistenza, la quale si sperimenta da un corpo in moto in un fluido, è proporzionale alla densità di questo fluido, al quadrato della velocità del corpo, ed alla proiezione sua sopra di un piano normale alla direzione del moto, od in altri termini è *proporzionale al peso di un prisma dello stesso fluido che abbia per base la proiezione del corpo, e per altezza quella dovuta alla velocità colla quale il corpo si muove.*

64. Le questioni relative al moto dei progetti verrebbero risolte in una maniera troppo lontana dai naturali fatti qualora si trascurasse la resistenza dell' aria. È noto per l'esperienza che nello grandissime velocità, le quali hanno luogo in siffatte questioni, la resistenza aumenta secondo una progressione più rapida di quella del quadrato della velocità colla quale il progetto si muove.

Supponendo qui che la densità dell' aria sia uniforme, sebbene in fatto possa variare nelle diverse parti della traiettoria, e che la resistenza sia una funzione della velocità del progetto, stabiliremo la teorica generale di questo moto dei progetti nei mezzi resistenti, e per applicazione delle formole generali esamineremo principalmente il caso della resistenza proporzionale al quadrato della velocità.

65. La traiettoria è piana.

Siano

$$x, y, z$$

le coordinate ortogonali del luogo occupato dal progetto alla

fine di un tempo t , e simo

s ed u

lo spazio percorso e la velocità lungo la traiettoria al termine di questo spazio, e venga rappresentata per

$$f(u)$$

la resistenza, la quale agisce nel senso contrario al moto, e lungo la tangente la curva.

Si rappresenti con g la gravità la quale agisce dall'alto in basso nel senso della verticale.

I coseni degli angoli che la tangente la curva forma coi tre assi coordinati sono

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds};$$

e quindi le componenti della resistenza, dirette contro gli assi, saranno rappresentate da

$$-\frac{dx}{ds} f(u), \quad -\frac{dy}{ds} f(u), \quad -\frac{dz}{ds} f(u).$$

Ora per le formole generali del moto curvilineo, essendo

$$X = -\frac{dx}{ds} f(u); \quad Y = -\frac{dy}{ds} f(u); \quad Z = -\frac{dz}{ds} f(u) - g$$

avremo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dx}{ds} f(u); \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{dy}{ds} f(u)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = -\frac{dz}{ds} f(u) - g,$$

ove giova avvertire che la forza acceleratrice g , operando secondo la verticale, è stata applicata nella direzione dell'asse z in senso contrario al suo prolungamento, mentre quest'asse lo riguarderemo positivo andando dal basso in alto.

La coesistenza delle due prime formole ci dà immediatamente

$$dx d^2y = dy d^2x;$$

da cui per un primo integrale

$$dy = a dx$$

e quindi

$$y = ax + b,$$

ove a , b sono due costanti arbitrarie. Dunque il luogo occupato successivamente dal proietto è piano.

66. Trasformazione delle formole generali del moto in altre più comode.

Siano

$$x, y$$

le coordinate di un luogo piano occupato dal proietto in moto, e s'intenda che le x siano verticali e le y orizzontali. Rappresenti α l'angolo che la tangente la traiettoria nel punto x, y forma coll'asse delle x , ritenendo per u la velocità secondo la curva, avremo facilmente

$$\frac{dx}{dt} = u \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = u \sin \alpha$$

e quindi colla derivazione rispetto il tempo

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \cos \alpha \frac{du}{dt} - u \sin \alpha \frac{d\alpha}{dt}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = \sin \alpha \frac{du}{dt} + u \cos \alpha \frac{d\alpha}{dt}.$$

Si moltiplichi la prima di queste due equazioni per $\cos \alpha$, e la seconda per $\sin \alpha$, e si addizionino e si avrà

$$\frac{du}{dt} = X \cos \alpha + Y \sin \alpha; \quad (1)$$

si moltiplichino ora la stessa prima equazione per $\sin \alpha$, e la seconda per $\cos \alpha$, e si sottraggano, ne viene

$$u \frac{dz}{dx} = Y \cos \alpha - X \sin \alpha \quad (2)$$

Le (1) e (2) saranno principalmente le equazioni delle quali faremo uso.

67. Equazioni particolari del moto dei proiettili nei mezzi resistenti. Non considereremo il proiettile nel suo ramo ascendente, ma lo prenderemo in quel punto ove principia a discendere, e qui porremo l'origine delle coordinate supponendo che l'asse delle x sia diretto dall'alto in basso nel senso della gravità, e quello delle y sia orizzontale. La resistenza che agisce in senso contrario alla velocità e cresce con questa in una maniera continua, seguiranno a rappresentarla per $f(u)$, la quale dovrà essere tale da annullarsi insieme con u , cioè $f(0)=0$: le forze acceleratrici secondo gli assi formandosi della gravità, e della resistenza, ci daranno pel ramo discendente della traiettoria

$$X = g - f(u) \cos \alpha$$

$$Y = - f(u) \sin \alpha.$$

Sostituendo questi valori nelle (1), (2) otterremo

$$\frac{du}{dt} = g \cos \alpha - f(u) \quad (3)$$

$$u \frac{d\alpha}{dt} = - g \sin \alpha \quad (4)$$

ove giova avvertire essere queste le forze secondo la tangente e la normale.

68. Conseguenze che si deducono da queste equazioni essendo qualunque la resistenza del mezzo. Nella (4)

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{g \sin \alpha}{u},$$

essendo senz quantità positiva, e d'altronde la derivata di α rispetto il tempo, essendo negativa, ne risulta che α è tale funzione di esso tempo che diminuisce al crescere di questo. Se peraltro α giunge ad essere zero, trovandosi allora il proietto nella verticale non potrà allontanarsi da questa, perchè non è animato che da forze verticali.

La (3)

$$\frac{du}{dt} = g \cos \alpha - f(u)$$

rappresenta la forza che produce il moto secondo la traiettoria, perchè $g \cos \alpha$ e $f(u)$ agiscono lungo la tangente. Questa forza durante il moto di proiezione non può diventar negativa, dunque $\frac{du}{dt}$ non può passare dal positivo al negativo, e perciò la velocità u non può diventar massima. Ma questa medesima velocità non può diventare zero, perchè in tal caso si avrebbe

$$du = 0, f(u) = 0$$

e quindi

$$g \cos \alpha = 0$$

la quale per α diverso da $\frac{\pi}{2}$ è impossibile.

Di qui risulta che la velocità u secondo la traiettoria tende ad un limite determinato.

Rappresentiamo per

A, B

i limiti verso i quali convergono le quantità

$$\frac{g \sin \alpha}{u}, \text{ e } g \cos \alpha - f(u)$$

ed avremo

$$\frac{d\alpha}{dt} = - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{u} = A \pm \varepsilon$$

$$\frac{du}{dt} = g \cos \alpha - f(u) = B \pm \varepsilon'$$

Integrando la prima di queste equazioni a partire da $t=0$, pel quale $\alpha = \alpha_0$, ne risulta

$$\alpha - \alpha_0 = \int_0^t (A \pm \varepsilon) dt = t(A \pm \varepsilon)$$

Ora il primo membro è necessariamente una quantità finita, mentre il secondo membro può crescere indefinitamente con t , quando che non sia $A = 0$; dunque deve essere

$$A = 0.$$

Operando nello stesso modo si trova ancora

$$B = 0$$

e così abbiamo

$$\lim \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{u} = 0$$

$$\lim [g \cos \alpha - f(u)] = 0;$$

onde nel limite è

$$\operatorname{sen} \alpha = 0, \quad g \cos \alpha = f(u)$$

ovvero

$$\alpha = 0, \quad g = f(u).$$

Il che dimostra che la velocità nel limite è verticale ed allora la forza acceleratrice g è uguale alla resistenza del mezzo, ed il progetto si muove di moto uniforme.

69. La traiettoria ha un asintoto verticale. Riprendiamo le due equazioni

$$\frac{dy}{dt} = u \operatorname{sen} \alpha; \quad \frac{d\alpha}{dt} = - \frac{g \operatorname{sen} \alpha}{u}$$

dalle quali

$$dy = -\frac{u^2}{g} d\alpha$$

ed integrando a partire da $y = 0$ si ha

$$y = -\frac{1}{g} \int_{\alpha_0}^{\alpha} u^2 d\alpha = \frac{1}{g} (\alpha_0 - \alpha) \bar{u}^2,$$

essendo $\bar{u}^2$ un medio tra u^2 ed u_0^2 . Ora questo secondo membro è una quantità finita, dunque l'ordinata tende ad acquistare un valore costante b , per modo che $y = b$ è un asintoto verticale della curva.

70. Forza secondo la normale. Lorchè ha luogo un moto curvilineo esiste una forza centrifuga la quale nell'agire lungo la normale è data dal quadrato della velocità che il corpo possiede in quel punto che si considera, diviso pel raggio di curvatura.

Nel caso presente l'unica forza acceleratrice che agisce lungo la normale è

$$g \sin \alpha$$

come è dato dalla (4), dunque sarà

$$\frac{u^2}{\rho} = g \sin \alpha, \quad (5)$$

rappresentando per ρ il raggio di curvatura. La $\frac{u^2}{\rho}$, come vedremo in seguito, è la forza centripeta. Essendo poi la traiettoria concava rispetto l'asse delle x sarà

$$\rho = -\frac{ds}{d\alpha}$$

ove ds è l'elemento della curva.

Quindi derivano le formole per rappresentare generalmente tutte le circostanze del moto.

Sostituendo nella (5) il valore del raggio di curvatura si ottiene

$$ds = - \frac{u^2}{g} \cdot \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \quad (6)$$

Ora essendo

$$dx = ds \cos\alpha, \quad dy = ds \operatorname{sen}\alpha$$

sarà pure

$$dx = - \frac{u^2}{g} d\alpha \cos\alpha \quad (7)$$

$$dy = - \frac{u^2}{g} d\alpha \quad (8)$$

Inoltre essendo ancora

$$ds = u dt$$

troveremo

$$dt = - \frac{u}{g} \cdot \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}\alpha} \quad (9)$$

Se dunque si potesse avere la velocità colla quale si muove il progetto in funzione dell'angolo α , colla integrazione si potrebbero avere gli elementi

$$x, y, s, t, \rho$$

in funzione di quest'angolo e quindi la eliminazione di esso tra i valori di x ed y condurrebbe alla equazione della traiettoria.

71. Relazione generale tra la velocità u e l'angolo α . Per avere il valore di u in α si riprenda l'equazione

$$\frac{du}{dt} = g \cos\alpha - f(u)$$

ed in questa si sostituisca il valore di dt , e si otterrà

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{u}{\operatorname{sen}\alpha} \left(\frac{1}{g} f(u) - \operatorname{tang}\alpha \right)$$

ed ancora

$$\frac{1}{g} f(u) = \frac{d(usenz)}{u dz} \quad (10)$$

Lorquando $f(u)$ verrà definito per mezzo della velocità, ognuna di queste ultime due equazioni darà u per α .

72. Osservazione. Per mezzo delle stabilite equazioni possiamo dire che se delle tre cose, la legge della resistenza: la traiettoria: e la legge della velocità: se ne conosca una, si determinano le altre due.

La questione diretta, quale sarebbe, data la legge colla quale agiscono le forze sul mobile, determinare tutte le circostanze del moto, è la più importante. La sua risoluzione è fondata sulla integrazione della equazione

$$\frac{du}{d\alpha} = \frac{u}{sen\alpha} \left(\frac{1}{g} f(u) - tang\alpha \right),$$

la quale è del prim' ordine tra le due variabili α , u , ed integrata per le equazioni (6), (7), (8), (9) abbiamo tutte le circostanze del moto.

Queste integrazioni, dipendenti tutte da una sola variabile, potranno dar luogo a difficoltà analitiche più o meno grandi che l'imperfezione del calcolo integrale non permetterà di superare.

La questione inversa, quella cioè in cui si ha per scopo di conoscere le leggi delle forze che hanno prodotto il moto lorquando siano date le circostanze caratteristiche di questo, è molto più semplice, considerata sotto il punto di vista analitico, perchè si riduce ad una semplice differenziazione.

73. Ipotesi della forza resistente in ragione diretta del quadrato della velocità. Fino ad ora $f(u)$ è restata indeterminata, ma qui la supporremo proporzionale al quadrato della velocità, così che abbiassi

$$f(u) = au^2,$$

ove a è una costante che al §. 63 vedemmo da quali elo-

menti dipendeva, ma che ora determineremo col riflettere che la velocità secondo la curva tende ad un limite, e che al § 68 si trovò

$$f(u) = g,$$

onde rappresentando per U la velocità secondo la curva e corrispondente a questo limite, sarà

$$g = aU^2 \quad \text{da cui} \quad a = \frac{g}{U^2}.$$

Si riprenda la formola (10); essa si muterà in

$$\frac{d(usen\alpha)}{d\alpha} = \frac{u^2}{U^2}$$

ed ancora

$$\frac{d(usen\alpha)}{u^2 sen^3\alpha} = \frac{1}{U^2} \frac{d\alpha}{sen^3\alpha}$$

da cui, facendo

$$usen\alpha = \mu$$

$$\frac{d\mu}{\mu^3} = \frac{1}{U^2} \frac{d\alpha}{sen^3\alpha};$$

ed integrando avremo

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu_0^2} \right) = \frac{1}{U^2} \int \frac{d\alpha}{sen^3\alpha}$$

Onde integrare la quantità

$$\frac{d\alpha}{sen^3\alpha} \quad \text{porremo} \quad \tan \frac{\alpha}{2} = \lambda$$

da cui

$$\alpha = 2 \text{Arc.tang}(=\lambda), \quad \text{e} \quad d\alpha = \frac{2d\lambda}{1+\lambda^2};$$

e per essere

$$\frac{\sen \frac{\alpha}{2} \cos \frac{\alpha}{2}}{\lambda} = \frac{1}{1+\lambda^2} \frac{1}{\sqrt{1+\lambda^2}}$$

troveremo

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{2\lambda}{1 + \lambda^2}$$

e quindi

$$\operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{8\lambda^2}{(1 + \lambda^2)^2}.$$

Sostituendo si avrà

$$\int \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{4} \int (1 + \lambda^2)^2 \frac{d\lambda}{\lambda^3} = \frac{1}{4} \int \left(\lambda d\lambda + 2 \frac{d\lambda}{\lambda} + \frac{d\lambda}{\lambda^3} \right)$$

ovvero

$$\int \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^2 \alpha} = \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda^2}{2} + 2 \log \lambda - \frac{1}{2\lambda^2} \right) - \frac{1}{4} \left(\frac{\lambda_0^2}{2} + 2 \log \lambda_0 - \frac{1}{2\lambda_0^2} \right)$$

ed in fine

$$-\left(\frac{1}{\mu^2} - \frac{1}{\mu_0^2} \right) = \frac{1}{2U^2} \left[-\frac{\lambda^2 - \lambda_0^2}{2} + 2 \log \frac{\lambda}{\lambda_0} - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda_0^2} \right) \right] \quad (11)$$

la quale contiene la relazione fra μ ed α .

Nell'attuale ipotesi riesce facile la determinazione del valore dell'arco.

Essendo

$$u \operatorname{sen} \alpha = \mu, \quad ds = - \frac{u^2}{g} \frac{d\alpha}{\operatorname{sen} \alpha}$$

sarà pure

$$ds = - \frac{u^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g} \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha}$$

e quindi

$$ds = - \frac{u^2}{g} \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha}$$

ma è pure

$$\frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha} = U^2 \frac{d\mu}{\mu^3}$$

dunque

$$ds = - \frac{U^2}{g} \frac{d\mu}{\mu}$$

da cui

$$\frac{d\mu}{\mu} = - \frac{g}{U^2} ds$$

la quale integrata in modo che ad $s = 0$ corrisponda $\mu = \mu_0$ avremo

$$\mu = \mu_0 e^{-\frac{g}{U^2} s} \quad (12)$$

74. Da quanto si è premesso risulta essere difficile la determinazione della curva descritta nel caso generale, e ciò per la difficoltà che presenta la (11) onde avere da essa la u in funzione esplicita di r . Se però si suppone che la direzione della velocità di proiezione sia presso che orizzontale allora può calcolarsi la traiettoria, ed assegnare le circostanze del moto. Ritenendo pertanto verticale l'asse delle x ; sia θ l'angolo variabile che la direzione della velocità secondo la curva forma coll'asse delle y , e θ_0 sia quello che la velocità iniziale forma collo stesso asse: le quantità

$$\theta_0, \theta, \quad \theta - \theta_0$$

sono piccolissime.

Nell'attuale ipotesi abbiamo

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \theta, \quad \alpha_0 = \frac{\pi}{2} + \theta_0$$

da cui

$$\text{sen} \alpha = \text{sen} \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = \cos \theta,$$

ma

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{1.2} + \frac{\theta^4}{1.2.3.4} - \dots,$$

e perchè θ è piccolissimo, così

$$\operatorname{sen} \alpha = \cos \theta = 1$$

Parimenti

$$\cos \alpha = \cos \left(\frac{\pi}{2} + \theta \right) = -\operatorname{sen} \theta$$

ed essendo

$$\operatorname{sen} \theta = \theta - \frac{\theta^3}{1.2.3} + \frac{\theta^5}{1.2.3.4.5} - \dots$$

si ha

$$\cos \alpha = -\operatorname{sen} \theta = -\theta$$

Dopo ciò

$$d\alpha = d\theta, \quad u \operatorname{sen} \alpha = \mu = u$$

e così l'equazione

$$\frac{d\mu}{\mu^3} = \frac{1}{U^2} \cdot \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}^3 \alpha}$$

si muta in

$$\frac{du}{u^3} = \frac{1}{U^2} \cdot d\theta$$

dalla quale integrando si deduce

$$-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u_0^2} \right) = \frac{1}{U^2} (\theta - \theta_0)$$

ovvero

$$\frac{1}{u^2} = \frac{1}{u_0^2} - \frac{2}{U^2} (\theta - \theta_0)$$

e quindi

$$u^2 = \frac{u_0^2}{1 - 2k(\theta - \theta_0)}$$

ove

$$k = \frac{u_0^2}{U^2},$$

Ora osservando che

$$\frac{1}{1 - \beta} = 1 + \beta + \beta^2 + \dots = 1 + \beta$$

quando β è piccolissimo, così avremo

$$u^2 = u_*^2 [1 + 2k(\theta - \theta_*)], \quad (13)$$

cioè la relazione fra la velocità e l'angolo θ .

Vediamo ora quel che diventano le espressioni di dx , dy .

Essendo generalmente

$$dx = -\frac{u^2}{g} d\alpha \cot \alpha$$

sarà

$$dx = -\frac{u^2}{g} \theta d\theta,$$

ove sostituito il valore di u^2 si ha

$$dx = -\frac{u_*^2}{g} \theta [1 + 2k(\theta - \theta_*)] d\theta$$

Questa equazione con facile trasformazione si può mettere sotto la seguente forma

$$dx = -\frac{u_*^2}{g} [\theta_* + (\theta - \theta_*)] [1 + 2k(\theta - \theta_*)] d\theta$$

ed ancora

$$dx = -\frac{u_*^2}{g} [\theta_* + (1 + 2k\theta_*)(\theta - \theta_*) + 2k(\theta - \theta_*)^2] d\theta$$

e trascurando il termine che contiene $(\theta - \theta_*)^2$ ed integrando così che ad $x=0$ corrisponda $\theta = \theta_*$, troviamo pel valore approssimato della x ;

$$x = -\frac{u_*^2}{g} \left[\theta_*(\theta - \theta_*) + (1 + 2k\theta_*) \frac{(\theta - \theta_*)^2}{2} \right]$$

Per avere la y in funzione di θ riprenderemo

$$dy = -\frac{u^2}{g} d\alpha$$

la quale per le sostituzioni si muta in

$$dy = -\frac{u_*^2}{g} [1 + 2k(\theta - \theta_*)] d\theta$$

ed integrando in modo che sia

$$y = 0, \theta = \theta_0$$

avremo

$$y = -\frac{u_0^2}{g} \left[(\theta - \theta_0) + k(\theta - \theta_0)^2 \right]$$

Trovati i valori della x ed y in funzione di θ , resta ora che si elimini quest'angolo. A tal fine si divida il valore della y per quello della x , e si avrà

$$\frac{y}{x} = -\frac{1 + k(\theta - \theta_0)}{\theta_0 + \frac{(1 + 2k\theta_0)}{2}(\theta - \theta_0)}$$

e posto per comodo

$$1 + 2k\theta_0 = 2a,$$

ricaviamo

$$\theta - \theta_0 = -\frac{\theta_0 y + x}{ay + kx}$$

Sostituito questo valore in quello della y risulta

$$y = \frac{2k(\theta_0 y + x)}{ay + kx} - \frac{2kk(\theta_0 y + x)^2}{(ay + kx)^2}$$

ove

$$2k = \frac{u^2}{g}$$

cioè k rappresenta l'altezza dovuta alla velocità di proiezione.

La traiettoria approssimata è una curva del terz'ordine, e la sua equazione può essere posta sotto la forma

$$(ay + kx)^2 y + 2kk(\theta_0 y + x)^2 = 2k(\theta_0 y + x)(ay + ky) \quad (14)$$

Di qui si ricava per la portata, od ampiezza

$$x = 0, y = \frac{2k\theta_0^2}{a^2}(a - k\theta_0)$$

la quale, nell'ipotesi del moto nel vuoto essendo $k = 0$, si muta in

$$y = 4h\theta_0$$

che coincide con la (f) del § 46 quando in questa si faccia

$$v^2 = 2gh$$

ed α si supponga piccolissimo ed uguale a θ_0 onde

$$\operatorname{sen}\theta_0 = \theta_0, \quad \cos\theta_0 = 1$$

Per calcolare l'arco della traiettoria abbiamo generalmente.

$$ds = -\frac{u^2}{g} \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

e pel caso particolare, ritenendo essere h l'altrezza dovuta alla velocità di proiezione, e ponendo per comodo

$$s - 2k\theta_0 = 2b \quad \text{risulta} \quad ds = -4h(a + k\theta)d\theta$$

che integrata da θ_0 a θ dà

$$s = 2h(\theta_0 - \theta)[2b + k(\theta_0 - \theta)]$$

Con egual facilità può aversi la espressione del tempo, mentre generalmente è

$$dt = -\frac{u}{g} \frac{d\alpha}{\operatorname{sen}\alpha}$$

e fatte le opportune sostituzioni si ha

$$dt = -2\sqrt{h} (b + k\theta)^{-1} d\theta$$

la quale integrata così che a θ_0 corrisponda $t = 0$, risulta

$$t = \frac{4\sqrt{h}}{3k} \left[(b + k\theta_0)^{-1} - (b + k\theta)^{-1} \right]$$

Finalmente essendo pel raggio di curvatura

$$\rho = \frac{u^2}{g \operatorname{sen}\alpha}$$

si avrà, fatte le necessarie sostituzioni

$$\rho = 2h[1 + 2k(\theta - \theta_0)]$$

CAPO V.

*Moto d'un punto materiale sopra una superficie
e per una curva.*

75. Forza centripeta e centrifuga. Sia un punto materiale che ad un tempo t si trovi all'estremo s d'una curva qualunque, estremo che abbia per coordinate x, y, z , con una velocità v . È evidente, che questa velocità è diretta secondo la tangente all'estremo di s . Le componenti della velocità v secondo i tre assi ortogonali sono

$$\frac{dx}{dt}, \quad \frac{dy}{dt}, \quad \frac{dz}{dt},$$

e le forze che le producono sono espresse da

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}.$$

Se ora si esprimano con α, β, γ gli angoli che la direzione di v , o la tangente all'estremità di s fa coi tre assi avremo

$$\frac{dx}{dt} = v \cos \alpha, \quad \frac{dy}{dt} = v \cos \beta, \quad \frac{dz}{dt} = v \cos \gamma.$$

Differenziando queste equazioni e dividendo per dt avremo

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2x}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \alpha + v \frac{d \cos \alpha}{dt} \\ \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \beta + v \frac{d \cos \beta}{dt} \\ \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \cos \gamma + v \frac{d \cos \gamma}{dt} \end{array} \right.$$

Si vede che i primi termini dei secondi membri sono le

componenti secondo i tre assi d'una forza $\frac{dv}{dt}$ diretta secondo la tangente, ed i secondi termini sono le componenti secondo i tre medesimi assi d'una forza che con essi fa gli angoli la cui funzioni trigonometriche sono

$$d.\cos\alpha, d.\cos\beta, d.\cos\gamma,$$

la qual forza dovendo essere la radice della somma dei quadrati delle tre componenti sarà

$$\frac{v}{dt} \sqrt{(d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2}$$

ora se si dice ω (Stat. §. 323) l'angolo di contingenza sarà

$$\omega = \sqrt{(d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2} \quad (*)$$

(*) S'immagini ad un punto M d'una curva condotta una tangente MA—1 cioè uguale al raggio delle tavole trigonometriche. Si consideri ora ad un punto seguente infinitamente prossimo al primo condotta un'altra tangente. Se dal punto M si conduca una retta parallela a questa, e sia MB; l'angolo AMB sarà l'angolo di contingenza ω ; se dunque col centro M, ed il raggio MA si descrive un archetto fra MA, ed MB questo sarà ω , che si potrà considerare come una retta infinitesima, e poichè il raggio è normale all'archetto circolare, la ω sarà normale ad MA, o alla tangente in M: ma il raggio osculatore in M è normale alla tangente MA: dunque la ω è parallela al raggio osculatore. Si dicano ora α, β, γ gli angoli che la MA fa coi tre assi, ed a, b, c i coseni di questi angoli, saranno poi

$$a \rightarrow da, b \rightarrow db, c \rightarrow dc$$

i coseni degli angoli che la tangente immediatamente seguente alla MA farà coi detti assi. Ora si supponga che l'origine delle coordinate sia in M, essendo la MA il raggio delle tavole, le proiezioni di MA sopra i tre assi saranno i coseni a, b, c degli angoli che MA fa coi tre assi, e le proiezioni di MB sopra i tre medesimi assi saranno i coseni $a \rightarrow da, b \rightarrow db, c \rightarrow dc$ degli angoli che MB farà coi tre assi. Con poca riflessione si vedrà che da, db, dc , saranno le proiezioni della

dunque la forza le di cui componenti sono i secondi termini delle equazioni superiori è $v \frac{\omega}{dt}$; ma il raggio di curvatura è (Stat. §.195) $\frac{ds}{\omega}$, esprimendolo dunque con ρ sarà

$$\omega = \frac{ds}{\rho};$$

dunque la detta forza sarà

$$\frac{v}{dt} \frac{ds}{\rho}.$$

ossia, perchè $\frac{ds}{dt} = v$, questa forza sarà $\frac{v^2}{\rho}$. Essa è diretta secondo il raggio osculatore. Infatti si vede nella nota, che questo raggio fa coi tre assi angoli dei quali i coseni sono

$$\frac{d.\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{d.\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{d.\cos\gamma}{\omega}.$$

Si decomponga ora la forza $\frac{v^2}{\rho}$, come se fosse diretta pel raggio osculatore, secondo i tre assi queste componenti saranno

$$\frac{v^2}{\rho} \frac{d.\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{v^2}{\rho} \frac{d.\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{v^2}{\rho} \frac{d.\cos\gamma}{\omega}.$$

Ponendo invece di un fattore v il suo valore $\frac{ds}{dt}$, ed in

retta ω sopra i tre assi, dunque

$$\omega = V(da^2 + db^2 + dc^2) = V[(d.\cos\alpha)^2 + (d.\cos\beta)^2 + (d.\cos\gamma)^2].$$

Si vede poi che i coseni degli angoli che ω , o il raggio vettore fa coi tre assi sono

$$\frac{d.\cos\alpha}{\omega}, \quad \frac{d.\cos\beta}{\omega}, \quad \frac{d.\cos\gamma}{\omega}$$

luogo di ρ il suo valore $\frac{ds}{\omega}$ le tre componenti saranno

$$\frac{v}{dt} d.\cos\alpha, \quad \frac{v}{dt} d.\cos\beta, \quad \frac{v}{dt} d.\cos\gamma,$$

che sono appunto le componenti della forza $\frac{v^2}{\rho}$ nelle equazioni (a).

Dalle stesse equazioni (a) si ricava che un punto materiale animato da forze qualunque descrivendo una curva in ogni punto di essa il punto materiale è animato da due forze l'una $\frac{dv}{dt}$ secondo la tangente, l'altra $\frac{v^2}{\rho}$ secondo il raggio osculatore al detto punto della curva, o secondo la normale alla detta tangente. Questa seconda forza è quella che ritiene il corpo sulla curva ed è diretta verso il centro di curvatura se esso si muove sul convesso della curva, ed oppostamente a questo se si muove nel concavo: perciò si chiama *forza centripeta*. Ma il corpo avendo la velocità diretta secondo la tangente tende a sfuggire dalla curva colla stessa forza che ve la ritiene e perciò quella che è forza centripeta è anche forza *centrifuga* perciò questa *forza di due nomi è uguale al quadrato della velocità diviso pel raggio osculatore*.

La forza centripeta e centrifuga si può trovar anche in altro modo.

Sulla tangente ad un punto di coordinate x, y, z luogo del mobile s'intendano decomposte le forze

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2}$$

dirette secondo i tre assi. Facendo essa tangente coi detti assi gli angoli di coseni uguali a

$$\frac{dx}{ds}, \quad \frac{dy}{ds}, \quad \frac{dz}{ds}$$

La somma delle dette componenti secondo la tangente, che si esprimerà con T , sarà

$$T = \frac{d^2x}{dt^2} \cdot \frac{dx}{ds} + \frac{d^2y}{dt^2} \cdot \frac{dy}{ds} + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \frac{dz}{ds};$$

ora abbiamo

$$v^2 = \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2,$$

differenziando questa equazione e dividendo per dt avremo

$$\frac{dx}{dt} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{dt} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{dt} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = v \frac{dv}{dt};$$

ma abbiamo

$$\frac{ds}{dt} = v$$

quindi dividendo l'antecedente equazione per questa avremo

$$\frac{dx}{ds} \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dy}{ds} \cdot \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{dz}{ds} \cdot \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{dv}{dt}$$

ma il primo membro è il valore di T dunque

$$T = \frac{dv}{dt} \text{ ossia perchè } v = \frac{ds}{dt} \text{ sarà } T = \frac{d^2s}{dt^2}$$

ciò che si poteva prevedere perchè secondo la tangente è la direzione della velocità, dunque secondo la tangente

è la forza che produce questa velocità cioè $\frac{dv}{dt}$. Dopo ciò

il quadrato della forza normale alla tangente, o della forza secondo il raggio osculatore si ottiene sottraendo dal quadrato della forza secondo la curva il quadrato della forza secondo la tangente. Il primo quadrato è evidentemente

$$\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2$$

che è la somma dei quadrati delle componenti della detta forza diretta secondo gli assi ortogonali, dunque esprimendo con N le componenti secondo la normale avremo

$$N = \sqrt{\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\right]}$$

ora abbiamo

$$\rho = \frac{ds^2}{\sqrt{[(d^2x)^2 + (d^2y)^2 + (d^2z)^2 - (d^2s)^2]}}$$

(§.) ossia dividendo numeratore e denominatore per dt

$$\rho = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\sqrt{\left[\left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2s}{dt^2}\right)^2\right]}}$$

dunque

$$N = \frac{\left(\frac{ds}{dt}\right)^2}{\rho} = \frac{v^2}{\rho}.$$

76. Moto d'un punto materiale sopra una data superficie. Sia

$$Adx + Bdy + Cdz = 0$$

l'equazione differenziale della data superficie. Il punto materiale ad un tempo si trovi nel punto della superficie di coordinate x, y, z colla velocità v , ed animato da forze che si riducano alle tre X, Y, Z secondo tre assi ortogonali. Sia N l'azione del corpo animato dalle dette forze contro la superficie che sarà nella direzione normale ad essa, quindi sarà $-N$ la reazione della superficie contro il corpo.

I coseni degli angoli che questa normale fa coi tre assi sono

$$\frac{A}{M}, \quad \frac{B}{M}, \quad \frac{C}{M}, \quad \text{ove } M = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$$

quindi le componenti di N secondo i tre assi saranno

$$\frac{AN}{M}, \quad \frac{BN}{M}, \quad \frac{CN}{M}$$

e prendendole negative saranno le componenti della reazione della superficie contro il corpo, le quali se si ammetteranno si potrà supporre il punto materiale libero: dunque le forze dalle quali sarà esso sollecitato secondo i tre assi saranno

$$X - \frac{AN}{M}, \quad Y - \frac{BN}{M}, \quad Z - \frac{CN}{M};$$

quindi l'equazioni del moto sulla superficie saranno

$$(1) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = X - \frac{AN}{M}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y - \frac{BN}{M}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z - \frac{CN}{M}$$

77. Formola della velocità. Si moltiplichi la prima delle equazioni (1) per dx , la seconda per dy , la terza per dz , e si sommino coll'avvertire che

$$Adx + Bdy + Cdz = 0$$

$$\frac{dx d^2x + dy d^2y + dz d^2z}{dt^2} = Xdx + Ydy + Zdz$$

ossia

$$\frac{1}{2} d \left(\frac{ds}{dt} \right)^2 = Xdx + Ydy + Zdz$$

cioè

$$(2) \quad v dv = Xdx + Ydy + Zdz$$

78. Valore della pressione. Si moltiplichi la prima delle equazioni (1) per A, la seconda per B, la terza per C, si sommino, e si ponga $\frac{ds}{v}$ invece di dt avremo

$$N = \frac{AX + BY + CZ}{M} - \frac{v^2}{M} \frac{Ad^2x + Bd^2y + Cd^2z}{ds^2}$$

Eliminando nelle (1) la N avremo due equazioni fra x, y, z, t , alle quali se si aggiunga l'equazione data della superficie avremo tre equazioni, dalle quali si avranno le coordinate date in tempo per sapere il luogo del mobile ad ogni tempo.

Finalmente se da queste tre equazioni si elimini il tempo si avranno le due equazioni della traiettoria percorsa dal mobile, cioè l'equazioni delle due proiezioni di queste su due piani coordinati.

79. Caso in cui il mobile non è sollecitato da forza. In questa ipotesi è $X=0, Y=0, Z=0$ dunque la (2) ci darà

$$udu = 0, \quad \text{cioè} \quad u = c$$

cioè la velocità costante, o il moto uniforme qualunque sia la curva che il mobile percorre sulla superficie.

80. Caso in cui il mobile è animato dalla sola gravità. Sia questa espressa per $\pm g$ ove il segno superiore indica la gravità che fa discendere il mobile, e l'inferiore ha luogo nell'ascesa dei gravi. Supponendo nella (2) la x verticale all'ingiù secondo la gravità avremo

$$X = \pm g, \quad Y = 0, \quad Z = 0$$

dunque la (2) diverrà

$$udu = \pm g dx$$

dove si vede che per qualunque superficie o curva discenda o monti il grave, acquista la stessa velocità come se fosse disceso o montato per uguale altezza.

81. Moto d'un corpo per una curva a semplice curvatura. Per questa avremo l'equazione differenziale

$$A dx + B dy = 0$$

e le due equazioni del moto

$$X - \frac{AN}{M} = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - \frac{BN}{M} = \frac{d^2y}{dt^2}$$

ove

$$M = \sqrt{A^2 + B^2}$$

82. Pressione del mobile contro la curva. Questa sarà

$$(3) \quad N = \frac{AX + BY}{M} - \frac{u^2}{M} \cdot \frac{Ad^2x + Bd^2y}{ds^2}$$

ora

$$B = -\frac{Adx}{dy}, \quad M = \frac{Ads}{dy}$$

ed il raggio osculatore, supponendo s la variabile principale è

$$r = \mp \frac{ds^3}{dx d^2y - dy d^2x}$$

ove il segno superiore è per la curva concava, l'inferiore per la convessa. Fatte queste sostituzioni nella (3) avremo

$$N = \frac{Xdy - Ydx}{ds} \mp \frac{u^2}{r}$$

dove il segno superiore è per il caso del moto per la curva convessa, e l'inferiore è per la concava. Con piccola rifles-

sione si vede che il termine $\frac{Xdy - Ydx}{ds}$ è la forza normale, colla quale il corpo per le forze che gli sono applicate preme la curva. Ora il secondo termine $\frac{u^2}{r}$ è la forza cen-

trifuga, che nasce dall'esser esso corpo diretto secondo la tangente. Or questa forza si aggiunge a crescere la forza normale nelle curve concave, e diminuisce la detta forza normale nelle curve convesse, il che si vede dover esser così solo che s'immagini il moto nelle due curve.

CAPO VI.

Delle forze centrali.

83. Si dice moto prodotto da forze centrali, quando il mobile è animato da forza, che proviene da un centro.

84. Nella Meccanica ed Idraulica si trova il trinomio

$$(4) \quad Xdx + Ydy + Zdz$$

ove X, Y, Z sono le componenti secondo i tre assi delle forze, da cui è animato un punto materiale trovandosi in un punto di coordinate x, y, z . Ora si dimostra che se il corpo è animato da una forza diretta ad un centro e d'intensità che sia una funzione qualunque della sua distanza dal centro il trinomio (4) è un differenziale esatto. Sia infatti questa forza espressa da $f(r)$ cioè da una funzione qualunque della distanza r del corpo dal centro attraente. Essendo

$$\frac{x}{r}, \quad \frac{y}{r}, \quad \frac{z}{r}$$

i coseni degli angoli che la detta forza fa coi tre assi, le sue componenti parallele a quest'assi saranno

$$f(r) \frac{x}{r}, \quad f(r) \frac{y}{r}, \quad f(r) \frac{z}{r};$$

dunque il trinomio (4) diventerà

$$\frac{f(r)}{r} (xdx + ydy + zdz)$$

ma

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

e perciò

$$x dx + y dy + z dz = r dr :$$

dunque il detto trinomio sarà $f(r)dr$ formola generale del differenziale di una funzione qualunque $F(r)$ e perciò differenziale esatto.

85. La curva descritta dal mobile per la forza centrale è a semplice curvatura perchè giacente in un piano che passa pel centro attracente. Si richiamino le formole generali del moto

$$(a) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = Z.$$

La forza proveniente dal centro agendo ad una distanza r sul mobile può rappresentarsi da questa retta quando le coordinate x, y, z rappresenteranno le di lei componenti: onde avremo

$$\frac{X}{Y} = \frac{Y}{Z} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

e perciò

$$(b) \quad xY = yX, \quad xZ = zX, \quad yZ = zY$$

L'equazioni (a) per una combinazione semplicissima ci danno

$$(c) \quad \begin{cases} x d^2y - y d^2x = (xY - yX) dt^2 \\ x d^2z - z d^2x = (xZ - zX) dt^2 \\ y d^2z - z d^2y = (yZ - zY) dt^2 \end{cases}$$

In virtù delle equazioni (b) i secondi membri di questa sono zero: quindi facendo una facile integrazione dei primi membri avremo

$$(d) \quad \begin{cases} xdy - ydx = cdt \\ zdx - xdz = c'dt \\ ydz - zdy = c''dt \end{cases}$$

ove c , c' , c'' sono le costanti arbitrarie. Si moltiplichi la prima per z , la seconda per y , e la terza per x troveremo

$$cx + c'y + c''x = 0$$

equazione d'un piano che passa per l'origine delle coordinate.

86. Relazione fra le aree descritte dai raggi vettori ed i tempi che impiegano a descriverle nelle forze centrali. Essendo la traiettoria nelle forze centrali una linea a semplice curvatura riterremo la prima delle equazioni (d)

$$xdy - ydx = cdt$$

Sia ω l'angolo, che il raggio vettore r fa coll'asse delle x avremo

$$x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega;$$

di qui facilmente si ridurrà l'espressione

$$xdy - ydx \text{ ad } r^2 d\omega:$$

quindi $r^2 d\omega = cdt$. Ora $r d\omega$ è l'arco infinitesimo della traiettoria ed $\frac{r^2 d\omega}{2}$ è l'area del settore compreso fra due raggi vettori che vanno agli estremi dell'arco $r d\omega$ dunque sarà l'area descritta dal raggio vettore nel tempo dt ; questa è uguale a $\frac{cdt}{2}$, dunque nelle forze centrali l'area descritta dal raggio vettore è proporzionale al tempo in cui la descrive.

Viceversa, se l'area descritta dal raggio vettore è proporzionale al tempo in cui la descrive, la forza da cui è animato il mobile partirà dal polo. In questo caso hanno luogo l'equazioni (d) è perciò differenziandole avremo

$$xd^2y - yd^2x = 0$$

$$xd^2x - xd^2z = 0, \quad yd^2z - zd^2y = 0$$

perchè nella seconda differenziazione il dt è costante. Rivolgendoci ora alle equazioni (c) concluderemo

$$xY - yX = 0, \quad zX - xZ = 0, \quad yZ - zY = 0$$

dalle quali avremo

$$\frac{X}{Y} = \frac{Y}{Z} = \frac{x}{y} = \frac{y}{z}$$

cioè le componenti della forza sono proporzionali alle coordinate x, y, z : di più sono nella direzione del polo: dunque anche la loro risultante, o forza da cui è animato il mobile è proporzionale alla distanza di questo dal detto polo, ed avrà la direzione secondo questa retta cioè partirà dal polo.

87. Teoria delle forze centrali dedotta dalle leggi di Keplero. Queste leggi sono le seguenti:

1.^a Li pianeti si muovono in orbite piane, e li raggi vettori descrivono intorno al centro del sole aree proporzionali ai tempi.

2.^a Le orbite dei pianeti sono ellissi, di cui il centro del sole occupa un foco.

3.^a Li quadrati dei tempi delle rivoluzioni dei pianeti sono fra loro come i cubi dei grandi assi.

Pel teorema (§. 86.) dalla prima legge si ricava che i pianeti sono animati da una forza che parte dal centro del sole. Per dedurre le conseguenze dalle altre due leggi prepariamo l'equazioni acconcie. Per la prima legge abbiamo (§. 86.) l'equazione $r^2 d\omega = c dt$. Se ne deve avere un'altra, perciò si riprendano l'equazioni generali

$$\frac{d^2x}{dt^2} = X, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = Y$$

e si dica φ la forza del centro sarà

$$(l) \quad X = -\varphi \frac{x}{r}, \quad Y = -\varphi \frac{y}{r};$$

il segno negativo ha luogo perchè le X, Y tendono ad aumentare le coordinate e la φ a diminuirle. Si moltiplichi la prima per $2dx$, la seconda per $2dy$, si sommino e si faccia l'integrazione, avremo

$$(m) \quad \frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} = c' - 2\int \varphi dr.$$

Ora abbiamo

$$x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega$$

dunque

$$dx^2 + dy^2 = dr^2 + r^2 d\omega^2$$

sostituendo questo valore in (m), ed il valore di dt ricavato dall'equazione $r^2 d\varphi = c dt$ avremo in ultimo

$$(n) \quad \frac{c^2}{r^2} \cdot \frac{dr^2}{d\omega^2} + \frac{c^2}{r^2} = c' - 2\int \varphi dr$$

da questa equazione data la forza in funzione della distanza r dal centro si troverà l'equazione fra r , ed ω o l'equazione polare della traiettoria, e viceversa data questa equazione si potrà trovare la forza centrale.

88. Conseguenza dedotta dalla seconda legge di Keplero. Questa legge stabilisce che le orbite dei pianeti sono ellissi un foco delle quali è occupato dal centro del sole, ove si può supporre riconcentrata tutta la forza attrahente. Da ciò viene, che se s'introduce nella (n) l'equazione polare dell'ellisse si potrà trovare la φ in funzione di r o la legge, colla quale agisce l'attrazione solare in ragione della distanza del centro del pianeta dal centro del sole. L'equazione polare dell'ellisse può essere scritta

$$(p) \quad \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos(\omega - v)}{a(1 - e^2)}$$

ove a è il semiasse maggiore, la e il rapporto dell'eccentricità al semiasse a , ω è l'angolo che fa il raggio vettore con una retta la quale passa pel fuoco e forma coll'asse maggiore a un angolo v . Differenziando l'equazione (p) avremo

$$\frac{1}{r^2} \cdot \frac{dr}{d\omega} = \frac{e \sin(\omega - v)}{a(1 - e^2)}$$

ed elevando al quadrato

$$\frac{1}{r^4} \cdot \frac{dr^2}{d\omega^2} = \frac{e^2 \sin^2(\omega - v)}{a^2(1 - e^2)^2} = \frac{e^2}{a^2(1 - e^2)^2} - \frac{e^2 \cos^2(\omega - v)}{a^2(1 - e^2)^2};$$

ma l'equazione (p) ci dà

$$\frac{e^2 \cos^2(\omega - v)}{a^2(1 - e^2)^2} = \frac{1}{r^2} - \frac{2}{a(1 - e^2)} \frac{1}{r} + \frac{1}{a^2(1 - e^2)^2},$$

dunque

$$\frac{1}{r^4} \cdot \frac{dr^2}{d\omega^2} = \frac{2}{a(1 - e^2)} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2} - \frac{1}{a^2(1 - e^2)^2}$$

Sostituendo questo valore del primo membro nella equazione (n) sarà

$$\frac{2e^2}{a(1 - e^2)} \cdot \frac{1}{r} - \frac{c^2}{a^2(1 - e^2)} = c' - 2 \int \varphi dr$$

che differenziata ci dà $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$ facendo $\mu = \frac{c^2}{a(1 - e^2)}$: dunque il centro del sole attrae i pianeti in ragione inversa del quadrato della distanza del centro di questo, dal centro del sole.

89. **Riflessione sul risultamento antecedente.** Poi-

chè la $\mu = \frac{c^2}{a(1 - e^2)}$ in $\varphi = \frac{\mu}{r^2}$ dipende dagli elementi co-

stanti della traiettoria ellittica del mobile: quindi per due diversi pianeti non si può dire che le attrazioni del centro del sole sono in ragione inversa dei quadrati delle distanze dei centri dei detti pianeti dal centro del sole: ma questo rapporto generale si ricava quando conosceremo la

90. **Conseguenza dedotta dalla terza legge di Keplero.** Sia T il tempo che un pianeta impiega a percorrere tutta la sua orbita, o il tempo periodico del pianeta, sarà questo tempo duplo dell' area chiusa dalla detta orbita, e ciò per la prima legge perchè il raggio vettore nel tempo T descrive la detta area ma l'arca dell'ellisse è espressa da πab , ove a, b sono i due semiassi, ossia da $\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ essendo $e = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a}$: dunque $cT = 2\pi a^2 \sqrt{1-e^2}$ onde avremo $\mu = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}$: ma dalla terza legge $\frac{a^3}{T^2} = c'$ dunque $\mu = 4\pi^2 c'$: dunque il μ è costante per i diversi pianeti onde la φ varia come $\frac{1}{r^3}$.

91. **Si risolve il problema inverso all'antecedente.** Si supponga che la forza centrale agisca in ragione inversa del quadrato della distanza del mobile del centro e si cerchi la natura della traiettoria. Nelle equazioni (1) (§. 83.)

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\varphi x}{r}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\varphi y}{r}$$

si ponga $\varphi = \frac{\mu}{r^3}$ esse diverranno

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu x}{r^3}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mu y}{r^3}.$$

Si moltiplichi la prima per $2dx$, e la seconda per $2dy$ e si sommino, avremo

$$\frac{2xd^2x + 2dyd^2y}{dt^2} + \frac{\mu(2xdx + 2ydy)}{r^3} = 0$$

ossia perchè $x^2 + y^2 = r^2$ e perciò $xdx + ydy = rdr$ sarà

$$\frac{2xd^2x + 2dyd^2y}{dt^2} + 2\mu \frac{dr}{r^3} = 0$$

ed integrando avremo

$$\frac{dx^2 + dy^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0$$

e sostituendovi le coordinate polari, dalle equazioni

$$x = r \cos \omega, \quad y = r \sin \omega$$

avremo

$$\frac{dr^2 + r^2 d\omega^2}{dt^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0$$

cui si deve aggiungere l'equazione delle forze centrali in genere $r^2 d\omega = c dt$. Eliminando il dt tra queste equazioni avremo

$$\frac{c^2 dr^2}{r^4 d\omega^2} + \frac{c^2}{r^2} - \frac{2\mu}{r} + b = 0$$

si faccia $\frac{1}{r} = z$ sarà $\frac{-dr}{r^2} = dz$, e $\frac{dr^2}{r^4} = dz^2$ quindi avremo

$$c^2 \frac{dz^2}{d\omega^2} + c^2 z^2 - 2\mu z - b = 0,$$

sarà l'equazione differenziale della traiettoria domandata. Risolvendola per $d\omega$ avremo

$$(r) \quad d\omega = \frac{\pm c dz}{\sqrt{(2\mu z + b - c^2 z^2)}}$$

89. **Analisi dell'equazione antecedente.** La traiettoria che si domanda ha un raggio vettore massimo, e minimo.

Infatti nell'equazione (r) fatto $\frac{dz}{d\omega} = 0$ avremo

$$\sqrt{(2\mu z + b - c^2 z^2)} = 0,$$

che risolta ci dà

$$z = \frac{\mu}{c^2} \pm \sqrt{\left(\frac{\mu^2}{c^4} + \frac{b}{c^2}\right)}.$$

Il segno positivo corrisponde al minimo di z , o al massimo r , ed il negativo al massimo di z , o al minimo di r come si potrà vedere dal prendere il coefficiente differenziale di $c^2 z^2 - 2\mu z - b$.

90. Spiegazione del doppio segno del secondo membro. Si supponga che l'angolo ω cominci al minimo dei raggi vettori egli è evidente, che sinchè il raggio vettore partendo da questo raggio minimo e andando verso il massimo crescerà onde $-\frac{dr}{r^3}$ sarà negativo: ma dal raggio vettore

massimo finchè ritorni al minimo decrescerà e $-\frac{dr}{r^3}$ sarà positivo e perciò dz ragionevolmente ha il doppio segno. Dovendosi ora procedere alla integrazione si vede che questa ci dà un arco seno, o un arco coseno pel doppio segno: ma ci dobbiamo decidere per l'arco coseno. Infatti sappiamo che trattandosi di un arco di circolo fra i limiti zero e mezza circonferenza al crescere dell'arco il coseno decresce o il differenziale dello stesso arco è negativo: ma andando da mezza circonferenza all'intera crescendo l'arco il coseno cresce dunque il differenziale dell'arco è positivo: dunque nel caso nostro crescendo la ω dal raggio vettore minimo andando verso il massimo il suo coseno decresce quindi il $d\omega$ deve essere negativo: e positivo diverrà quando l'arco proseguirà a crescere dal raggio vettore massimo ritornando verso il minimo onde il $d\omega$ sarà positivo: dunque o posi-

tivo o negativo che sia il $d\omega$, nel caso nostro si può integrare equazione per arco coseno.

91. Integrazione dell'equazione differenziale dell'intrajettoria. Per integrare l'equazione (r) si considerino i due termini

$$2\mu z - c^2 z^2 = - (c^2 z^2 - 2\mu z)$$

e si compisca il quadrato dentro parentesi avremo

$$- \left(c^2 z^2 - 2\mu z + \frac{\mu^2}{c^2} \right)$$

quindi avremo

$$\begin{aligned} & \sqrt{2\mu z + b - c^2 z^2} \\ &= \sqrt{\left[b + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(cz - \frac{\mu}{c} \right)^2 \right]} \end{aligned}$$

e per la (r) avremo

$$\begin{aligned} d\omega &= \frac{\pm c dz}{\sqrt{\left[b + \frac{\mu^2}{c^2} - \left(cz - \frac{\mu}{c} \right)^2 \right]}} \\ &= \frac{\pm c^2 dz}{\sqrt{[bc^2 + \mu^2 - (c^2 z - \mu)^2]}} \\ &= \frac{\pm \frac{c^2 dz}{\sqrt{bc^2 + \mu^2}}}{\sqrt{\left[1 - \left(\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{bc^2 + \mu^2}} \right)^2 \right]}} \end{aligned}$$

ed integrando

$$\omega = \arccos \left(= \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{bc^2 + \mu^2}} \right) + c'.$$

Supponendo che al principio del moto ω , e z sia ω_0 , z_0 avremo

$$\omega - \omega_0 = \arccos \left(= \frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{(\mu^2 + bc^2)}} \right) - \arccos \left(= \frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{(\mu^2 + bc^2)}} \right)$$

e facendo

$$\omega_0 - \arccos\left(\frac{c^2 z_0 - \mu}{\sqrt{(\mu^2 + bc^2)}}\right) = \omega'$$

avremo

$$\omega - \omega' = \arccos\left(\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{(\mu^2 + bc^2)}}\right);$$

da cui

$$\frac{c^2 z - \mu}{\sqrt{(\mu^2 + bc^2)}} = \cos(\omega - \omega'),$$

e finalmente trovando il valore di z , e poi quello di r , essendo $z = \frac{1}{r}$ avremo

$$(s) \quad r = \frac{\frac{c^2}{\mu}}{1 + \sqrt{\left(1 + \frac{bc^2}{\mu^2}\right)} \cos(\omega - \omega')}$$

Questa è l'equazione polare generale di tutte le curve coniche. Infatti l'equazione polare dell'ellisse è

$$(t) \quad r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

ove θ è l'angolo che fa il raggio vettore coll'asse della curva dalla parte ove il suo vertice è il più vicino al foco; a , e esprimono l'una il semiasse maggiore, e l'altra il rapporto fra l'eccentricità e semiasse maggiore. Le due equazioni (s), (t) diventano identiche ponendo

$$\omega - \omega' = \theta, \quad e = \sqrt{1 + \frac{bc^2}{\mu^2}},$$

$$a(1 - e^2) = \frac{c^2}{\mu}.$$

La seconda di queste equazioni dà l'ellisse se b è negativo perchè in questa curva $e < 1$. L'equazione polare della

parabola è $r = \frac{p}{1 - \cos \vartheta}$. Per identificarla colla (s) deve es-

sere $\omega = \omega' = 0$, $b = 0$, $p = \frac{c^2}{\mu}$.

Finalmente se $b > 0$ l'equazione (s) potrà identificarsi colla equazione $r = \frac{a(e^2 - 1)}{1 - e \cos \vartheta}$ in cui $e > 1$: dunque la (s) è una ellisse, una parabola, una iperbola secondochè

$$b < 0, \quad b = 0, \quad b > 0$$

CAPO VII.

Moto dei punti pesanti sopra linee

92. Moto per la lunghezza d'un piano inclinato.

S'immagini un triangolo rettangolo con un cateto orizzontale ed un punto materiale discenda, o ascenda per l'ipotenusa, che rappresenta di profilo un piano inclinato. Sia l la lunghezza di questo piano inclinato ed a l'altezza, sia m l'inclinazione dell'ipotenusa alla verticale. Si consideri il punto discendere e al luogo ove si trova dopo un tempo t , la sua gravità g si decomponga in due l'una secondo il piano inclinato, l'altra a questo normale: la prima sarà $g \cos m$, l'altra $g \sin m$: con questa il mobile premerà il piano coll'altra discenderà, e poichè in $g \cos m$ i due fattori sono costanti quindi il moto sarà uniformemente accelerato con una gravità modificata dalla moltiplicazione per la frazione $\cos m$. Nel caso che il mobile ascendesse, la forza sarebbe $-g \cos m$. Perciò l'equazioni (§. 18) del moto uniformemente accelerato, e ritardato sono applicabili al caso nostro solo che vi si ponga $\pm g \cos m$ invece di g .

Nel moto uniformemente accelerato abbiamo

$$u = gt, \quad u = \sqrt{2gs}, \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g}}$$

dunque nel moto pel piano inclinato abbiamo

$$u = g t \cos m, \quad u = \sqrt{2g s \cos m},$$

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g \cos m}}.$$

Si domandi ora la velocità quando il mobile avrà percorsa la lunghezza l del piano inclinato. Basterà porre l invece di s in $u = \sqrt{2gs}$ quindi avremo

$$u = \sqrt{2gl \cos m}; \quad \text{ma} \quad l \cos m = a$$

dunque $u = \sqrt{2ga}$ cioè avrà acquistato per la lunghezza la velocità che acquisterebbe liberamente cadendo per l'altezza, che è la proprietà generale (§. 80) per lo sdruciolare dei gravi sopra linea qualunque. Il tempo però per la lunghezza è molto più lungo di quello per l'altezza, e tanto più, quanto è maggiore l'angolo fatto dal piano inclinato coll'altezza. Infatti il tempo per l'altezza è

$$T = \sqrt{\frac{2a}{g}}, \quad \text{e quello per la lunghezza è } T' = \sqrt{\frac{2l}{g \cos m}}$$

da ciò può sorgere il problema: determinare la porzione di piano inclinato cominciando dal vertice, che si percorre nello stesso tempo dell'altezza. Abbiamo

$$T = \sqrt{\frac{2a}{g}}, \quad t = \sqrt{\frac{2s}{g \cos m}}$$

dunque $T = t$, e perciò $s = a \cos m$: quindi la dimandata porzione è la proiezione di a sopra l , ed è perciò limitata dalla normale condotta dal vertice dell'angolo retto sulla lunghezza del piano inclinato.

Ma se il mobile percorre questa normale pure impiega lo stesso tempo dell'altezza. Infatti se dal punto ove cade

la normale sulla ipotenusa si conduca una linea verticale uguale all'altezza ed il suo estremo si congiunga coll'estremità inferiore con una retta, si proverà che essa è normale sulla ipotenusa, quindi questa normale sarà una porzione del piano inclinato che abbia per altezza la detta verticale quindi il mobile percorrendo la normale all'ipotenusa impiegherà lo stesso tempo che cadendo per questa verticale o per l'altezza del primo piano inclinato: dunque possiamo dire che se si fissi una retta verticale, e dalle due sue estremità si conducano due rette che si uniscano nell'angolo retto, ciò si può avere in infiniti modi, queste rette considerate come piani inclinati si percorreranno nello stesso tempo, che se cadessero liberamente per la detta verticale.

Ora è evidente che queste rette sono corde, che in un semicircolo si conducono dalle estremità d'un diametro verticale.

93. **Oscillazione del pendolo.** Si supponga un circolo verticale, ed in questo un diametro verticale, che nel basso terminerà al punto più basso del circolo. In questo si consideri un arco A a sinistra. Si muova un punto materiale animato dalla gravità g e discenda per l'arco in un tempo t fino ad un punto, rimanga l'arco s a percorrersi fino al fondo. Sia a l'ascissa dell'estremità superiore di A computata dal punto più basso, ed r il raggio del circolo. Se il mobile prosegue il suo sdrucciolare per l'arco arriverà al punto più basso, ove ha la velocità che acquisterebbe liberamente cadendo per l'altezza a di A . Con questa velocità salirà per un uguale arco A a destra nello stesso tempo in cui è caduto per A , ed al culmine avendo estinta la velocità ricadrà per l'arco A a destra onde risalire per l'arco A a sinistra e così successivamente. Or lo stesso moto si ottiene se si escluda il detto circolo, e si ammetta un filo rigido non pesante di lunghezza r che

possa rotare in una sua estremità nel centro del detto circolo, ed all'altra estremità pesi dell'unità di peso g .

Infatti se dal detto centro si conduca verticalmente una retta r , ed il filo pesante all'estremità si faccia deviare finchè faccia col raggio verticale r un angolo misurato da A , lasciato a sé il filo, a causa del peso dell'estremità andrà verso il raggio verticale il suo estremo pesante percorrendo l'arco A , e giunto al punto più basso, o fattosi il filo verticale l'estremo pesante avrà la velocità che acquisterebbe liberamente cadendo per l'altezza dell'arco e con questa velocità a dritta monterà per un arco a questo uguale per poi discendere. Il moto del pendolo per l'arco doppio di questo si dice un' oscillazione del pendolo, quindi l'oscillazione del pendolo è il moto del punto infimo. Trattiamo del moto di questo pendolo trovando il tempo che esso impiega partendo dal punto più alto dell'arco che percorre arrivando ad un suo punto qualunque. La velocità non si deve trovare perchè si conosce.

L'estremo superiore di A è il punto di partenza del pendolo, ed in un tempo t giunge all'estremità superiore di s : da queste due estremità si conducano due normali al raggio verticale, e la distanza del piede della prima normale dal centro sia c , e del piede della seconda sia x . Parta l'estremo del pendolo di peso la gravità g dal punto A colla velocità k ed abbia la velocità v al principio di s avremo

$$v^2 = k^2 + 2g(x - c) ,$$

Ora abbiamo $dt = \frac{-ds}{v}$, ove il ds è negativo perchè al crescere del tempo decresce l'arco dunque

$$dt = \frac{-ds}{\sqrt{[k^2 + 2g(x - c)]}} .$$

Si dica α l'angolo fatto colla verticale dal pendolo quando è

all'estremo superiore di A, e θ quando è all'estremo superiore di s ambedue pel raggio uno avremo

$$s = r\theta, \quad v = -\frac{ds}{dt} = -\frac{rd\theta}{dt}.$$

Avremo ancora

$$(1) \quad dt = \frac{-rd\theta}{\sqrt{[k^2 + 2gr(\cos\theta - \cos\alpha)]}}$$

e questa è la formola che si deve integrare.

94. Caso in cui l'equazione del tempo del pendolo è integrabile in forma finita. Questo è quando si abbia

$$(2) \quad k^2 = 2gr(1 + \cos\alpha)$$

che ha luogo quando il mobile parte dall'estremità di A colla velocità che acquisterebbe liberamente cadendo dalla distanza verticale di questo punto al punto culminante del circolo. Per avere l'integrazione si faccia $\theta = 2\omega$. In questo caso

$$1 + \cos\theta = 2\cos^2\omega$$

e la equazione (1) diventando colla condizione (2)

$$dt = \frac{-rd\theta}{\sqrt{2gr(1 + \cos\theta)}} = \frac{-2rd\omega}{\sqrt{2gr(1 + \cos 2\omega)}} = -\sqrt{\frac{r}{g}} \cdot \frac{d\omega}{\cos\omega}.$$

Per integrare $\frac{d\omega}{\cos\omega}$ si rifletta che possiamo porre

$$\int \frac{d\omega}{\cos\omega} = \int \frac{d\omega \cos\omega}{\cos^2\omega} = \int \frac{d(\sin\omega)}{1 - \sin^2\omega}.$$

Si ponga $\sin\omega = x$ ed avremo

$$\begin{aligned} \int \frac{d\omega}{\cos\omega} &= \int \frac{dx}{1-x^2} = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} + C = \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin\omega}{1-\sin\omega} + C \\ &= \frac{1}{2} \log \frac{1+\sin\frac{1}{2}\theta}{1-\sin\frac{1}{2}\theta} + C \end{aligned}$$

dunque

$$t = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \log. \left(\frac{1+\sin\frac{1}{2}\theta}{1-\sin\frac{1}{2}\theta} \right) + C.$$

Portando l'integrale al principio del moto sarà

$$t = 0, \quad \theta = \alpha$$

onde

$$0 = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \log. \left(\frac{1+\sin\frac{1}{2}\alpha}{1-\sin\frac{1}{2}\alpha} \right) + C.$$

Sottraendo questa dall'antecedente uguaglianza sarà

$$(3) \quad t = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \log. \left(\frac{1+\sin\frac{1}{2}\alpha}{1-\sin\frac{1}{2}\alpha} \cdot \frac{1-\sin\frac{1}{2}\theta}{1+\sin\frac{1}{2}\theta} \right)$$

95. Casi del risultamento. Se il mobile partisse dal punto culminante del circolo l'angolo α sarebbe π cioè mezza circonferenza. In questo caso la (3) si ridurrebbe ad una quantità divisa per zero, che è simbolo d'assurdità: dunque in questo caso è assurdo il moto, e così deve essere perchè il mobile pesante trovandosi nel punto culminante del circolo si trova sulla tangente orizzontale dunque deve essere in quiete.

Giunto il mobile al punto più basso sarà $\theta = 0$ onde il tempo per giungervi sarà

$$T = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{r}{g}} \log. \left(\frac{1+\sin\frac{1}{2}\alpha}{1-\sin\frac{1}{2}\alpha} \right)$$

96. Caso utile in pratica, pel quale si può integrare l'equazione differenziale del tempo del pendolo. Questo caso è che le oscillazioni siano di poca ampiezza ossia che α , e θ siano angoli piccoli. Si supponrà eziandio che il mobile parta dalla quiete onde si farà $k=0$, allora l'equazione (1) diventa

$$dt = -\sqrt{\frac{r}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{(2\cos\theta - 2\cos\alpha)}}$$

Ora abbiamo

$$\cos \theta = 1 - \frac{\theta^2}{2} + \frac{\theta^4}{2.3.4} - \dots$$

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} + \frac{\alpha^4}{2.3.4} - \dots$$

Essendo θ , ed α piccole quantità si potranno trascurare le loro quarte potenze, onde avremo

$$dt = - \sqrt{\frac{r}{g}} \frac{d\theta}{\sqrt{(\alpha^2 - \theta^2)}}.$$

Integrando e determinando la costante col riflettere che quando $\theta = \alpha$, $t = 0$ avremo

$$(4) \quad t = \sqrt{\frac{r}{g}} \operatorname{arc}.\cos \left(= \frac{\theta}{\alpha} \right)$$

Se si suppone il pendolo posto verticalmente cioè il mobile giunto al punto più basso sarà $\theta = 0$ onde

$$\operatorname{arc}.\cos \left(= \frac{\theta}{\alpha} \right) = \frac{\pi}{2}, \quad \text{ed avremo} \quad t = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{r}{g}}.$$

Avendo in questo luogo il mobile la velocità acquistata per l'altezza dell'arco $r\alpha$ con questa monterà a dritta per un uguale arco, e nello stesso tempo: onde il tempo d'una oscillazione sarà

$$T = \pi \sqrt{\frac{r}{g}} :$$

discenderà quindi e farà un'altra oscillazione nello stesso tempo, e così di seguito. Egli è rimarchevole che questo tempo dell'oscillazione è indipendente dall'arco che percorre il mobile, o dall'ampiezza dell'oscillazione, in guisa che sebbene l'oscillazione vada rallentando il tempo rimane lo stesso.

97. Discesa d'un punto materiale pesante per la concavità di un arco cicloidale. Si consideri un arco cicloidale che abbia il vertice al punto più basso: da questo si alzi la verticale e l'ascissa, computata da questo punto, del punto di partenza del grave sia h : in un tempo t poi giunga ad un punto la di cui ascissa sia x , e l'arco che rimane a percorrersi fino al punto più basso sia s . Se h è l'ascissa verticale del punto di partenza, ed x l'ascissa del punto dell'arco dove arriva in un tempo t sarà $h-x$ l'altezza verticale dell'arco percorso onde la velocità dopo il tempo t sarà

$$v = \sqrt{2g(h-x)} \quad \text{ora} \quad dt = \frac{-ds}{v} : \text{dunque} \quad dt = \frac{-ds}{\sqrt{2g(h-x)}}$$

Nella cicloide l'arco s è due volte la corda dell'arco del circolo generatore della stessa ascissa x : dunque $s = 2\sqrt{ax}$ essendo a il diametro del circolo generatore adunque

$$ds = \sqrt{\frac{a}{x}} dx \quad \text{perciò} \quad dt = \sqrt{\frac{a}{2g}} \cdot \frac{-dx}{\sqrt{h-x}}$$

Per integrar subito $\frac{-dx}{\sqrt{h-x}}$ si dividano ambedue i termini per $\sqrt{hx}$ avremo

$$\int \frac{-dx}{\sqrt{h-x}} = \int \frac{\frac{-dx}{\sqrt{hx}}}{\sqrt{1-\frac{x}{h}}} = 2 \text{arc.cos} \left(\sqrt{\frac{x}{h}} \right)$$

dunque

$$t = 2\sqrt{\frac{a}{2g}} \text{arc.cos} \left(\sqrt{\frac{x}{h}} \right).$$

Non vi è costante perchè al principio del moto $t=0$, $x=h$. Se si dica T il tempo che impiega il mobile ad arrivare al punto più basso dovendosi fare $x=0$ avremo

$$T = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}$$

essendo π mezza circonferenza di raggio 1. Si vede che il tempo della discesa fino al punto più basso della cicloide è indipendente dal punto di partenza, o dalla grandezza dell'arco percorso. Si chiama *tautocrona* la curva che si percorre da un grave scendendo al punto più basso, di qualunque grandezza sia l'arco percorso, impiegando sempre l'istesso tempo: dunque la cicloide è *tautocrona*, e dimostreremo che

98. **La sola cicloide è curva tautocrona.** Se si nomina t' il tempo che il mobile impiega a percorrere una curva qualunque o di qualunque grandezza per discendere al punto più basso ritenendo le superiori denominazioni avremo

$$t' \sqrt{2g} = \int_h^0 \frac{-ds}{\sqrt{(h-x)}}$$

integrando da $x = h$ ad $x = 0$ ovvero

$$(1) \quad t' \sqrt{2g} = \int_0^h \frac{ds}{\sqrt{(h-x)}}$$

integrando da $x = 0$ ad $x = h$. Ora per trovare la curva tautocrona si deve trovare la curva dove riesca $t' \sqrt{2g}$ indipendente da h , cioè la s deve essere funzione di x indipendente da h . Sia questa funzione

$$(2) \quad s = Ax^\alpha + Bx^\beta + Cx^\gamma + \text{ec.}$$

essendo A, B, C ec. α, β, γ , ec. coefficienti ed esponenti numerici indeterminati. Poiché l'arco s , e la x debbono essere allo stesso tempo zero al punto più basso, nell'antecedente equazione veruno degli esponenti potrà essere negativo, o niun termine indipendente da x . Anzi si vede a priori che l'esponente più basso deve essere minore dell'unità perchè al punto più basso la tangente dovendo essere orizzontale $\frac{ds}{dx}$ dovrà essere la secante trigonometrica di 90° o impossibile, ciò che si avrà perchè differenziata

l'equazione superiore o divisa per dx , avrà $\frac{ds}{dx}$ un termine di esponente negativo, che sarà proveniente dal termine di esponente minore dell'unità.

Prendendo il differenziale dell'equazione (2) e sostituendolo nella (1) avremo

$$t' \sqrt{2g} = A \alpha \int_0^h \frac{x^{\alpha-1} dx}{V(h-x)} + B \beta \int_0^h \frac{x^{\beta-1} dx}{V(h-x)} + \text{ec.}$$

Si faccia $x = hx'$, $dx = h dx'$ allora i limiti dell'integrale saranno zero e l'unità, si avrà per esempio

$$\int_0^h \frac{x^{\alpha-1} dx}{V(h-x)} = h^{\alpha-1} \int_0^1 \frac{x'^{\alpha-1} dx'}{V(1-x')}$$

si ponga

$$\int_0^1 \frac{x'^{\alpha-1} dx'}{V(1-x')} = A', \quad \int_0^1 \frac{x'^{\beta-1} dx'}{V(1-x')} = B' \text{ ecc.}$$

ed avremo

$$t' \sqrt{2g} = \alpha A A' h^{\alpha-1} + \beta B B' h^{\beta-1} + \text{ec.}$$

quello che si deve avvertire è che niuna delle quantità A' , B' , ec. non può essere zero; imperocchè i valori dei differenziali di cui sono le somme non cambiano di segno fra i limiti dell'integrazione: questi valori sono tutti positivi, e perciò positivi saranno gl'integrali. Ora è evidente che il valore di t' non può essere indipendente da h se tutti i termini della serie antecedente non siano zero eccettuato quello nel quale l'esponente di h è zero o che corrisponde ad uno degli esponenti α , β , ec. $= \frac{1}{2}$. Supponiamo che questo termine sia il primo, o che si abbia $\alpha = \frac{1}{2}$. Affinchè sparisca il secondo termine deve esser zero il prodotto $\beta B B'$, il che richiede che B sia zero non potendolo essere ne β , ne B' ; lo stesso si dica dei termini seguenti nei quali dovrà essere $C = 0$, $D = 0$ ec. Dopo ciò l'equa-

zione (2) diverrà $s = Ax^1$, ed $s^2 = A^2x$, che appartiene alla cicloide. Se a è il diametro del circolo generatore sarà $A^2 = 4a$, e quindi $t'\sqrt{2g} = A^1\sqrt{a}$ perchè $\alpha = \frac{1}{2}$ d'altronde

$$A^1 = \int_0^1 \frac{dx'}{\sqrt{x' - x'^2}} = \pi.$$

L'integrazione si eseguirà come nel (§. 97). Avremo dunque in ultimo

$$t' = \pi \sqrt{\frac{a}{2g}}.$$

101. Il tautocronismo della cicloide per qualunque arco, e del circolo per gli archi piccoli si può provare senza le integrazioni. Nella cicloide siano

terminati al punto più basso gli archi A , ed s . Sia l'arco A diviso in un numero di elementi uguali che diciamo α , ed s in altrettanti elementi che diremo s' . Ora se le forze acceleratrici colle quali il grave entra a percorrere gli archetti omologhi α ed s' sono proporzionali agli archetti medesimi, questi sono percorsi nello stesso tempo. Abbiamo

infatti $t^2 = \frac{2s}{g}$ dove è chiaro che se g è proporzionale ad

s , sarà costante: e se ciò avvenga in ciascuno dei punti omologhi di A , ed s è palese, che ciascuno degli elementi del primo sarà percorso nell'istesso tempo dell'elemento corrispondente del secondo, e così anche gli archi interi A , ed s saranno percorsi contemporaneamente. Ora o sia la curva A una cicloide, o sia un arco circolare di poca ampiezza avviene appunto che le forze acceleratrici tangenziali in due punti omologhi qualunque per esempio principio di A , e principio di s sono proporzionali agli archi A , ed s , e quindi ancora agli elementi α ed s' . Sia infatti x l'ascissa del punto superiore di s computata dal punto infimo, e sia y l'ordinata di questo punto. La forza tangen-

ziale al principio di s sarà $-\frac{gdx}{ds}$. Ora nella cicloide avendosi $s^2 = ax$ abbiamo

$$\frac{dx}{ds} = \frac{2s}{a} : \text{dunque } g \frac{dx}{ds} = 2 \frac{gs}{a}$$

e perciò la forza è proporzionale all'arco s . Nel circolo abbiamo

$$\frac{dx}{ds} = \frac{y}{a}, \quad g \frac{dx}{ds} = \frac{gy}{a}.$$

Ora se l'arco è assai piccolo la mezza corda si confonde coll'arco s dunque qui ancora la forza al principio di s è proporzionale a questo.

102. La cicloide è la curva per la quale discendendo un grave impiega il minimo tempo. S'immagini una curva qualunque di discesa, e siano x, y, z le coordinate d'un punto, ove il grave si trovi in un tempo t . Supponendo che l'asse della x sia verticale e diretto nel senso della gravità, ed indicando con α l'ascissa del punto di partenza, la velocità che avrà il mobile al tempo t sarà

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{2g(x - \alpha)}. \text{ Facendo } \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2} + \frac{dz^2}{dx^2}} = u$$

in guisa che si abbia $ds = u dx$ risulterà

$$\sqrt{2g} dt = \frac{u dx}{\sqrt{x - \alpha}}$$

dunque chiamando β il valore di x al punto più basso si avrà pel tempo della discesa

$$t\sqrt{2g} = \int_{\alpha}^{\beta} \frac{u dx}{\sqrt{x - \alpha}}$$

Quindi si deve determinare la curva per la quale questo valor risulti un minimo. Ma per più generalità considereremo l'in-

grale $U = \int_{\alpha}^{\beta} X u dx$, nel quale X è in funzione di x , che nel caso nostro sarà $(x - \alpha)^{-1}$.

Indichiamo con i una quantità costante ed infinitamente piccola e con $\delta y, \delta x$ due funzioni arbitrarie di x assoggettate alla condizione d'esser nulle per $x = \alpha$, ed $x = \beta$ e di non diventare infinite, o rompersi la continuità per li valori intermediari di x . Siano U' , e u' ciò che divengono U , ed u allorchè vi si pone $y \rightarrow i\delta y, x \rightarrow i\delta x$ invece di y , e x in guisa che $U' = \int_{\alpha}^{\beta} X u' dx$, integrale che apparterrà ad un'altra curva, che ha gli stessi estremi della proposta, e se ne discosta tra questi di quantità infinitamente piccola. Avremo dunque $U' - U = \int_{\alpha}^{\beta} X(u' - u) dx$, e posta la proprietà della curva proposta questa differenza $U' - U$ dovrà essere positiva qualunque siano i valori di $\delta y, \delta x$, e qualunque segno si dia ad i . Ora sviluppando la differenza $u' - u$ secondo le potenze di i , ed indicando con $i\delta u$ il primo termine del suo sviluppo, il primo termine di $U' - U$ sarà $i \int_{\alpha}^{\beta} X \delta u dx$, da cui si conchiuderà come nei massimi e nei minimi

$$(a) \quad \int_{\alpha}^{\beta} X \delta u dx = 0$$

senza che $U' - U$ cambierebbe di segno con i mentre deve essere sempre positiva. Questa condizione è comune al massimo ed al minimo. Quando sarà soddisfatta, la differenza $U' - U$ sarà in generale infinitamente piccola di secondo ordine. Essa avrà lo stesso segno del coefficiente di i^2 : quindi sarà un massimo o un minimo secondochè quel coefficiente sarà negativo o positivo, ma poichè nel nostro caso deve essere un minimo, quindi quel coefficiente dovrà essere positivo e basterà di soddisfare alla condizione (a). La quantità $i\delta u$

non è che il differenziale di u rispetto x , ed y , ed in esso gli accrescimenti sono espressi da δy , δx . Sopprimendo il fattore i comune ad $i\delta u$, ed al suo valore si avrà

$$\delta u = \frac{1}{u} \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} + \frac{1}{u} \frac{dx}{dx} \frac{d\delta x}{dx}$$

e ciò differenziando il valore di u , quindi l'equazione (a) diventerà

$$\int_{\alpha}^{\beta} \frac{X}{u} \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} + \int_{\alpha}^{\beta} \frac{X}{u} \frac{dx}{dx} \frac{d\delta x}{dx} = 0$$

Integrando per parti ed avvertendo che δy , δx sono nulle per ipotesi ai limiti $x = \alpha$, $x = \beta$ avremo

$$\begin{aligned} \int_{\alpha}^{\beta} \frac{X}{u} \frac{dy}{dx} \frac{d\delta y}{dx} dx &= - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\left(\frac{X}{u} \frac{dy}{dx}\right)}{dx} \delta y dx \\ \int_{\alpha}^{\beta} \frac{X}{u} \frac{dx}{dx} \frac{d\delta x}{dx} dx &= - \int_{\alpha}^{\beta} \frac{d\left(\frac{X}{u} \frac{dx}{dx}\right)}{dx} \delta x dx \end{aligned}$$

Queste cangeranno l'antecedente equazione in quest'altra

$$\int_{\alpha}^{\beta} \left[\frac{d\left(\frac{X}{u} \frac{dy}{dx}\right)}{dx} \delta y + \frac{d\left(\frac{X}{u} \frac{dx}{dx}\right)}{dx} \delta x \right] = 0$$

Ora essendo δy , δx funzioni arbitrarie di x , questo integrale non può esser nullo se non sia nullo il differenziale da integrarsi, dunque avremo

$$\frac{d\left(\frac{X}{u} \frac{dy}{dx}\right)}{dx} \delta y + \frac{d\left(\frac{X}{u} \frac{dx}{dx}\right)}{dx} \delta x = 0$$

Qui δy , δx essendo qualunque l'equazione si verificherà facendo

$$\frac{d\left(\frac{X}{u} \frac{dy}{dx}\right)}{dx} = 0, \quad \frac{d\left(\frac{X}{u} \frac{dx}{dx}\right)}{dx} = 0$$

Integrandole col supporre a , a' le costanti avremo

$$\frac{X}{u} \frac{dy}{dx} = a, \quad \frac{X}{u} \frac{dx}{dx} = a'$$

quindi

$$a' \frac{dy}{dx} - a \frac{dx}{dx} = 0:$$

integrando di nuovo, e supponendo c la nuova costante avremo $a'y - ax = c$: questa è la proiezione della curva domandata sul piano delle x , y , dunque questa curva è a semplice curvatura perchè ha per proiezione una retta. Per semplificare prenderemo per piano di questa curva il piano della x , y , avremo in questo caso $u = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$, e si dovrà considerare la sola prima delle antecedenti equazioni cioè $\frac{X}{u} \frac{dy}{dx} = a$ che ci darà

$$Xdy = a\sqrt{dx^2 + dy^2} :$$

dalla quale abbiamo

$$(a) \quad dy = \frac{adx}{\sqrt{X^2 - a^2}}$$

Manca d'integrare questa equazione che dipenderà dalla forma della funzione X , e poi determinare la costante colla condizione, che la curva in proposito e le sue estremità sono date di posizione.

Applichiamo l'equazione (a) al caso nostro. In que-

sto $X = \frac{1}{\sqrt{(x-a)}}$ dunque l'equazione (a) diventa

$$dy = \frac{(x-\alpha)dx}{\sqrt{[a(x-\alpha)-(x-\alpha)^2]}}$$

ponendo $\frac{1}{\sqrt{a}}$ invece di a . Questa è l'equazione differenziale della cicloide di cui la base è orizzontale, passa per un dato punto di ascissa α , e di diametro a del circolo generatore.

CAPO VIII.

Moto dei sistemi.

103. Principio di d'Alembert. Si supponga un sistema di punti materiali collegati fra loro, ed animati da forze qualunque. Egli è evidente che pel detto collegamento le forze applicate nella generalità non sortiranno tutto il loro effetto, essendo questo modificato dall'azione reciproca delle forze stesse: quindi si distingueranno le *forze impresse* ai diversi punti dalle *forze effettive*, o da quelle che sortiscono il loro effetto. Ora è evidente che le *forze impresse debbono essere in equilibrio colle forze effettive le une o le altre volte in senso opposto*. Imperocchè le forze impresse si possono considerare come componenti e l'effettive come le risultanti. E questo è il principio di d'Alembert, pel quale il moto si riduce all'equilibrio, o per dir meglio le formole del moto si deducono da quelle dell'equilibrio.

104. Espressioni delle forze del moto in equilibrio fra loro. Si esprimano con m, m', m'' ecc. gli elementi della massa del sistema. Siano

$x, y, z; \quad x', y', z'; \quad x'', y'', z''; \quad \text{ecc.}$

le coordinate dei detti elementi. Siano ancora

$X, Y, Z; \quad X', Y', Z'; \quad X'', Y'', Z''; \quad \text{ecc.}$

le componenti secondo i tre assi delle forze impresses ai detti elementi. È chiaro, che le componenti secondo i tre assi delle forze effettive da cui sarà animato il punto di m di coordinate x, y, z saranno espresse da

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

perchè provengono dalle velocità prodotte da queste forze. Cogli accenti si avranno le componenti delle forze effettive degli altri punti. Ora le forze effettive

$$\frac{d^2x}{dt^2}, \quad \frac{d^2y}{dt^2}, \quad \frac{d^2z}{dt^2},$$

sono le stesse per tutti i punti dell'elemento m , dunque le totali forze, da cui sarà animato m secondo i tre assi saranno

$$m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad m \frac{d^2z}{dt^2}$$

e così per gli altri elementi: dunque vi sarà equilibrio fra le forze

$X, Y, Z; \quad X', Y', Z'; \quad X'', Y'', Z''; \quad \text{ecc.}$

e le

$$\begin{array}{lll}
 -m \frac{d^2 x}{dt^2}, & -m \frac{d^2 y}{dt^2}, & -m \frac{d^2 z}{dt^2}, \\
 -m' \frac{d^2 x'}{dt'^2}, & -m' \frac{d^2 y'}{dt'^2}, & -m' \frac{d^2 z'}{dt'^2}, \\
 -m'' \frac{d^2 x''}{dt''^2}, & -m'' \frac{d^2 y''}{dt''^2}, & -m'' \frac{d^2 z''}{dt''^2}, \\
 \text{ecc.}
 \end{array}$$

vssia dovranno essere in equilibrio i sistemi della forze

$$\begin{aligned}
 & \sum \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \\
 & \sum \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right), \quad \sum \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right)
 \end{aligned}$$

105. Equazioni generali del moto dei sistemi ricavate dalle condizioni dell'equilibrio delle forze.

Sono sei l'equazioni dell'equilibrio di un sistema libero di forze. Tre sono onde non abbia luogo il moto progressivo, e tre pel moto rotatorio. Le prime tre saranno

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = 0 \\ \sum \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0 \\ \sum \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = 0 \end{array} \right.$$

le altre tre si ottengono dal mandare a zero le differenze dei momenti delle forze relativi ai tre assi: quindi saranno

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum \left[y \left(Z - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) - z \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \right] = 0 \\ \sum \left[z \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) - x \left(Z - m \frac{d^2 z}{dt^2} \right) \right] = 0 \\ \sum \left[x \left(Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) - y \left(X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \right] = 0 \end{array} \right.$$

106. **si considera l'equilibrio del moto progressivo delle forze applicate, ed effettive.** Dalle formule (1) abbiamo

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum m \frac{d^2 x}{dt^2} = \sum X \\ \sum m \frac{d^2 y}{dt^2} = \sum Y \\ \sum m \frac{d^2 z}{dt^2} = \sum Z \end{array} \right.$$

107. **Moto del centro di gravità.** Siano x_1, y_1, z_1 , le coordinate del centro di gravità del sistema avremo dalla teoria di questo centro l'equazioni:

$$(4) \quad \sum m x_1 = M x_1, \quad \sum m y_1 = M y_1, \quad \sum m z_1 = M z_1,$$

ove M è la massa del sistema. Da queste avremo

$$\sum m \frac{d^2 y_1}{dt^2} = M \frac{d^2 x_1}{dt^2}, \quad \sum m \frac{d^2 z_1}{dt^2} = M \frac{d^2 y_1}{dt^2},$$

$$\sum m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = M \frac{d^2 z_1}{dt^2},$$

Combinato queste colle (3) avremo

$$M \frac{d^2 x_1}{dt^2} = \sum X, \quad M \frac{d^2 y_1}{dt^2} = \sum Y, \quad M \frac{d^2 z_1}{dt^2} = \sum Z$$

dalle quali equazioni si ricava, che le componenti dell'accelerazione del movimento del centro di gravità sono identiche a quelle che si troverebbero per un punto la di cui massa fosse M , e che fosse sollecitato da tutte le forze date trasportate parallelamente a se stesse in questo punto.

Per ciò che si riferisce al moto iniziale supponiamo, che sia prodotto da forze istantanee aventi per componenti forze da produrre le velocità A, B, C in un punto materiale m ; A', B', C' in un altro m' , e così di seguito. Se in luogo delle forze continue si pongano queste istantanee nelle (3) avremo

$$\sum m \frac{dx}{dt} = \sum A, \quad \sum m \frac{dy}{dt} = \sum B, \quad \sum m \frac{dz}{dt} = \sum C$$

ma abbiamo dalle (4)

$$\sum m \frac{dx}{dt} = M \frac{dx_1}{dt}, \quad \sum m \frac{dy}{dt} = M \frac{dy_1}{dt},$$

$$\sum m \frac{dz}{dt} = M \frac{dz_1}{dt}$$

dunque

$$M \frac{dx_1}{dt} = \sum A, \quad M \frac{dy_1}{dt} = \sum B, \quad M \frac{dz_1}{dt} = \sum C$$

Si vede adunque, che le componenti della velocità iniziale del centro di gravità sono le stesse di quelle che sarebbero per un punto che avesse la massa M e fosse sollecitato da tutte le forze iniziali istantanee trasportate parallelamente a se stesse in questo punto.

Rinnoendo le due proposizioni si avrà questa. *Il moto del centro di gravità d'un sistema libero qualunque è lo stesso come se vi si unissero tutte le masse dei differenti punti, e*

se si trasportassero parallelamente a se stesse le forze istantanee, e le forze continue, che producono lo stato iniziale e lo stato susseguente del sistema.

Da ciò si ricava, che se i punti del sistema esercitassero l'uno sopra l'altro delle azioni reciproche uguali e contrarie, istantanee o successive, il moto del centro di gravità non sarebbe punto alterato, perchè trasportate queste forze in questo punto si distruggerebbero due a due, Così degli urti o dei legamenti istantanei fatti tra più corpi del sistema, o anche delle esplosioni interiori producenti sempre azioni uguali e contrarie non modificerebbero affatto il moto del centro di gravità. Ed ecco in che consiste il noto principio della conservazione del moto del centro di gravità.

108. Si considera l'equilibrio di rotazione fra le forze applicate ed effettive. Si considerino l'equazioni (2) (§. 105) che si potranno porre sotto la forma

$$(a) \left\{ \begin{array}{l} \sum m \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = \sum (yZ - xY) \\ \sum m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = \sum (zX - xZ) \\ \sum m \left(x \frac{d^2 y}{dt^2} - y \frac{d^2 x}{dt^2} \right) = \sum (xY - yX) \end{array} \right.$$

Queste equazioni, che hanno luogo ad ogni istante del moto, ci dicono, che le somme dei momenti delle forze applicate relativamente ai tre assi sono uguali ai momenti delle forze effettive.

109. Caso in cui la somma dei momenti delle forze applicate sia nulla. In questo caso i secondi membri delle equazioni (a) sono zero.

Questo caso ha luogo primo, quando il sistema non è animato da forze successive: secondo, quando il sistema

essendo rigido, le forze successive fossero in equilibrio: poichè i detti secondi membri sono le condizioni per l'equilibrio del moto rotatorio del sistema rigido. Finalmente i secondi membri sono nulli quando tutto le forze sono dirette verso un punto che si può prendere per origine delle coordinate: perchè in questo caso non vi può essere che moto progressivo. E poi in questo caso le forze X, Y, Z sono proporzionali ad x, y, z , onde abbiamo

$$yZ = zY, \quad zX = xZ, \quad yX = xY$$

In questi casi l'equazioni (a) ci danno

$$(b) \left\{ \begin{array}{l} \sum m \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0 \\ \sum m \left(z \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 z}{dt^2} \right) = 0 \\ \sum m \left(y \frac{d^2 x}{dt^2} - x \frac{d^2 y}{dt^2} \right) = 0 \end{array} \right.$$

Integrando queste equazioni e supponendo c, c', c'' le tre costanti avremo

$$(c) \left\{ \begin{array}{l} \sum m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = c \\ \sum m \left(z \frac{dx}{dt} - x \frac{dz}{dt} \right) = c' \\ \sum m \left(y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right) = c'' \end{array} \right.$$

Queste equazioni esprimono, che: *le somme dei momenti delle quantità di moto che animano il sistema ad un istante qualunque secondo tre assi ortogonali sono costanti*. In altri termini se ad un istante qualunque si considerino le forze

istantanee che produrrebbero su ciascun punto, partendo dal riposo, il moto da cui è animato, e queste forze si decompongano secondo i tre assi ed in tre coppie le somme delle differenze dei momenti di queste coppie secondo i tre assi saranno costanti.

110. Proprietà geometrica ricavata dal moto del sistema. Si consideri l'area conica descritta dal raggio vettore condotto dall'origine ad un punto di coordinate x, y, z , e si proietti sopra i piani coordinati, avremo le aree su questi piani descritte in un dato tempo dalle proiezioni del detto raggio vettore. Sia ora θ l'angolo formato in un dato tempo coll'asse delle y dalla proiezione r del raggio vettore dello spazio sul piano YZ , e che giri dall'asse delle y verso quello delle z ; avremo $\tan \theta = \frac{z}{y}$: differenziando sarà

$$\frac{d\theta}{\cos^2 \theta} = \frac{ydz - zdy}{y^2} : \text{ma } y = r \cos \theta,$$

dunque $r^2 d\theta = ydz - zdy$, dunque come $r^2 d\vartheta$, così $ydz - zdy$ sarà doppio del differenziale dell'area descritta dal raggio vettore r in un tempo infinitesimo. Se ora con $\lambda, \lambda', \lambda''$ si esprimano le somme delle aree descritte dalle proiezioni dei raggi vettori sopra i piani coordinati, ciascuna moltiplicata per la massa del punto materiale corrispondente, l'equazioni (c) ci daranno.

$$\frac{d\lambda'}{dt} = 0, \quad \frac{d\lambda''}{dt} = 0, \quad \frac{d\lambda'''}{dt} = 0,$$

dalle quali

$$\lambda = ct, \quad \lambda' = c't, \quad \lambda'' = c''t.$$

da ciò si ricava che nei diversi casi (§. 109) delle somme dei momenti zero: *le somme delle proiezioni delle aree descritte dai raggi vettori di tutti i punti moltiplicate per le*

piccole masse di questi punti sono proporzionali al tempo in cui sono descritte; ciò costituisce il principio della così detta conservazione delle aree.

111. Equazione delle forze vive. Per forza viva s'intende il quadrato della velocità moltiplicata per la massa che ha questa velocità. Essendo in equilibrio le forze

$$X - m \frac{d^2x}{dt^2}, \quad Y - m \frac{d^2y}{dt^2}, \quad Z - m \frac{d^2z}{dt^2}$$

pel principio di d'Alembert, e pel principio delle velocità virtuali (§. 302) dovrà regnare l'equazione

$$\sum \left[\left(X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x + \left(Y - m \frac{d^2y}{dt^2} \right) \delta y + \left(Z - m \frac{d^2z}{dt^2} \right) \delta z \right] = 0$$

Essendo in questa $\delta x, \delta y, \delta z$ qualunque si potrà porre

$$\delta x = dx, \quad \delta y = dy, \quad \delta z = dz,$$

quindi avremo

$$\sum m \left(\frac{d^2x}{dt^2} dx + \frac{d^2y}{dt^2} dy + \frac{d^2z}{dt^2} dz \right) = \sum (X dx + Y dy + Z dz)$$

ove il primo membro è la metà del differenziale di

$$\sum m \left(\frac{dx^2}{dt^2} + \frac{dy^2}{dt^2} + \frac{dz^2}{dt^2} \right)$$

o di Σmu^2 indicando per u la velocità della massa m , dunque

$$(1) \quad \frac{1}{2} d. \Sigma mu^2 = \Sigma (X dx + Y dy + Z dz).$$

Se dunque

$$\Sigma (X dx + Y dy + Z dz)$$

è il differenziale esatto d'una funzione φ di $x, y, z; x', y', z';$ cc. considerate come variabili indipendenti si potranno integrare i due membri dell'equazione precedente tra due tempi

qualunque e si avrà

$$(2) \quad \frac{1}{2} \sum m u^2 - \frac{1}{2} \sum m u_0^2 = \varphi(x, y, z; x' \dots) - \varphi(x_0, y_0, z_0; x'_0 \dots) .$$

Quindi in questo caso l'accrescimento della forza viva si può determinare quando si conoscano le posizioni di tutti i punti ai due detti tempi, questo accrescimento sarà indipendente dalle linee che abbiano percorse i punti in quell'intervallo, e tutte le volte che il sistema ripasserà per una medesima posizione, la somma delle forze vive ritornerà la stessa.

Se le forze X, Y, Z sono nulle il secondo membro dell'equazione (2) è nullo, e la somma delle forze vive è costante. Ed ecco in che consiste il principio della conservazione delle forze vive.

Se i punti del sistema sono soggetti alla sola forza di gravità si avrà

$$X = 0, \quad Y = 0, \quad Z = -gdm$$

prendendo l'asse delle z in direzione contraria alla gravità. L'equazione delle forze vive diventerà, indicando con z , la coordinata del centro di gravità

$$\frac{1}{2} \sum m u^2 - \frac{1}{2} \sum m u_0^2 = -gM(z - z_0).$$

Quindi la somma delle forze vive non dipenderà che dall'altezza del centro di gravità del sistema, ed essa ritornerà ad essere la stessa tutte le volte che questo punto passerà per lo stesso piano orizzontale.

Si dimostra, che l'espressione

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

è un differenziale esatto quando le forze che vi si considerano sono azioni reciproche tra li punti del sistema, proporzionali alla massa di questi punti, e dipendenti dalle loro distanze. Infatti siano $x, y, z; x', y', z'$ le coordinate di

due punti di massa m, m' , che abbiano una distanza f . La loro azione reciproca potrà esprimersi per $mm'F$ indicandosi con F la forza funzione della sola f . Ciò posto le tre componenti dell'azione esercitata da m' sopra m sopponendola attrattiva saranno

$$mm'F \frac{x' - x}{f}, \quad mm'F \frac{y' - y}{f}, \quad mm'F \frac{z' - z}{f},$$

e la quantità proveniente da queste componenti nell'espressione

$$\Sigma(Xdx + Ydy + Zdz)$$

sarà

$$mm'F \frac{(x' - x)dx + (y' - y)dy + (z' - z)dz}{f},$$

e la quantità proveniente dell'azione di m sopra m' sarà

$$mm'F \frac{(x - x')dx' + (y - y')dy' + (z - z')dz'}{f},$$

e se si riuniscono si avrà

$$-mm'F \frac{(x - x')(dx - dx') + (y - y')(dy - dy') + (z - z')(dz - dz')}{f}$$

ossia $-mm'Fdf$ (perchè $(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 = f^2$). Si sarebbe trovato $+mm'Fdf$ nel caso d'una forza repulsiva. Quindi tutti i termini provenienti dalle azioni reciproche dei punti saranno differenziali esatti quando queste azioni non dipendano che dalla loro distanza e siano proporzionali alla massa. Abbiamo dimostrato altrove che era lo stesso per tutte le forze agenti verso centri fissi e funzioni delle distanze da questi punti.

Si osserverà che il differenziale $-mm'Fdf$ delle azioni reciproche è negativo se df è positivo, ed è positivo se df è negativo. Dunque le attrazioni reciproche danno un accrescimento nelle somme delle forze vive quando i punti si

ravvicinano, ed una diminuzione quando l'uno dall'altro si allontana. Similmente se le azioni sono repulsive la somma delle forze vive crescerà se i punti si allontanano, e decrescerà se si avvicinano.

CAPO IX.

*Moto di rotazione d'un sistema invariabile
intorno ad un asse.*

112. Equazione del moto rotatorio. Supponendo il detto sistema animato da forze qualunque, queste affinchè sortiscano tutto il loro effetto debbono essere in piani normali all' asse. Ciò posto per avere l' equazione proposta col principio di D'Alembert stabiliremo l'equilibrio fra le forze impresse ed effettive queste volte in senso opposto. I quantitativi delle forze effettive pel punto materiale dm sono espresso da

$$\frac{d^2x}{dt^2} dm, \quad \frac{d^2y}{dt^2} dm, \quad \frac{d^2z}{dt^2} dm$$

Le forze impresse al detto punto potrebbero esprimersi per X, Y, Z ; dunque queste forze sono in equilibrio con

$$-\frac{d^2x}{dt^2} dm, \quad -\frac{d^2y}{dt^2} dm, \quad -\frac{d^2z}{dt^2} dm$$

quindi i momenti delle prime debbono essere uguali ai momenti delle seconde relativamente ai tre assi. Ma è meglio di considerare le due componenti delle forze effettive l'una tangente, e l'altra normale: la prima è quella che produce la variazione dell'attuale velocità, e l'altra è la forza centripeta che viene distrutta dall'asse perchè diretta secondo il raggio che descrive il punto, mentre l'altra è tangente al detto circolo. Ora questa forza è evidentemente espressa

da $\frac{dv}{dt}dm$ essendo v la velocità del punto. Sia ω l'angolo di raggio uno fatto da due piani che passano per l'asse di rotazione, l'uno fisso, l'altro mobile coll'elemento dm . Se r è la distanza di dm dall'asse sarà $r\omega$ l'arco di circolo che termina ove è il dm colla velocità v . La velocità è espressa dall'elemento seguente dello spazio diviso pel tempo dunque

$$v = r \frac{d\omega}{dt}, \quad e \quad \frac{dv}{dt} = r \frac{d^2\omega}{dt^2}$$

per la forza tangenziale. Se ora si dica P la la forza che anima l'elemento, e p la sua distanza dall'asse dovrà sussistere l'equilibrio di rotazione fra la forza

$$\Sigma P, \quad e \quad \Sigma - \frac{rd^2\omega}{dt^2} dm$$

quindi i loro momenti dovranno essere uguali, e perciò

$$\Sigma Pp - \Sigma r^3 \frac{d^2\omega}{dt^2} dm = 0$$

ossia

$$\Sigma Pp - \frac{d^2\omega}{dt^2} \Sigma r^3 dm = 0$$

perchè in tutti i momenti delle forze effettive il $\frac{d^2\omega}{dt^2}$ è lo stesso; dalla equazione antecedente abbiamo

$$(1) \quad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{\Sigma Pp}{\Sigma r^3 dm}$$

La massa d'un punto materiale moltiplicata pel quadrato della sua distanza dall'asse si chiama *momento d'inerzia rispetto questo asse*. Tale è nella equazione antecedente la quantità $r^3 dm$.

113. Applicazione alla Bilancia. Si consideri la bilancia in perfetto equilibrio, ma che per una azione qualunque sia squilibrata come nella (pag. 102). Si ritengano tutte le denominazioni di quel caso. Egli è evidente che in questo caso

$$\Sigma Pp = P.ah + M.gg' - P.bk :$$

dunque avremo

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{P.ah + M.gg' - P.bk}{\int r^2 dm}$$

che sarà la forza che tenderà a far ruotare la bilancia in senso opposto, o a ridurla all'equilibrio. Vi si sostituiscono i valori di ah , bk , gg' avremo

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{\sin\psi}{\int r^2 dm} (2P.OF + M.OG) = \frac{\sin\psi}{\Sigma r^2 dm} (M'.OF + M.FG) .$$

Se $OF = FG = 0$ la forza restituyente è nulla; allora la bilancia è *pigra*, anzi s'arresta del tutto essendo l'asta indifferente a fermarsi in qualunque situazione. Che se OF, FG sono negative la forza restituyente è negativa, allora la bilancia è *folle* perchè per minima inclinazione dell'asta invece di rimettersi nella situazione di equilibrio se ne allontana e trabocca.

114. Note il momento d'inerzia d'una massa rispetto un asse che passa pel centro di gravità, si trova il momento d'inerzia rispetto un altro asse qualunque parallelo al primo e di data distanza. Sieno tre assi coordinati, e l'asse delle z passi pel centro di gravità del sistema di un elemento dm , sia r la distanza da questo asse. Si consideri ora un altro asse parallelo al primo e distante da esso di a , ed al punto del piano delle x, y ove questo asse lo incontra siano le coordinate α, β . Siano poi x, y, z le coordinate di dm , ed r' la sua distanza

dal secondo asse avremo

$$r^2 = x^2 + y^2, \quad \alpha^2 + \beta^2 = a^2, \quad r'^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2$$

$$r'^2 = x^2 + y^2 - 2\alpha x - 2\beta y + \alpha^2 + \beta^2.$$

Moltiplicando per dm , e prendendo la somma sarà

$$\Sigma r'^2 dm = \Sigma r^2 dm - 2\alpha \Sigma x dm - 2\beta \Sigma y dm + a^2 m$$

Ora $\Sigma x dm$, $\Sigma y dm$ sono le somme dei momenti delle masse dm rispetto i piani delle xy , xz , che passano pel centro di gravità: dunque saranno zero, onde

$$\Sigma r'^2 dm = \Sigma r^2 dm + a^2 m$$

Se facciamo $\Sigma r^2 dm$ cioè la somma del momento d'inerzia rispetto l'asse che passa pel centro di gravità uguale a $k^2 m$ avremo

$$\Sigma r'^2 dm = m(k^2 + a^2)$$

Se si sostituisca questa espressione nella (1) invece di $\Sigma r^2 dm$ avremo

$$(2) \quad \frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{\Sigma P p}{m(k^2 + a^2)}$$

115. Caso della rotazione d'un corpo pesante intorno all'asse. Supponiamo orizzontale quest'asse, e sia quello delle y e l'asse delle z sia verticale. Si consideri l'angolo ω fatto dal piano, che passando per l'asse fisso, passa pel centro di gravità del sistema, col piano verticale delle yz . L'elemento dm sarà animato dalla forza verticale $g dm$, ed il suo momento rispetto l'asse di rotazione sarà $g x dm = P p$ dunque l'equazione (2) diventerà

$$\frac{d^2 \omega}{dt^2} = \frac{g \Sigma x dm}{m(k^2 + a^2)}.$$

Se sia x_1 , la distanza del centro di gravità del corpo dal piano delle xy avremo

$$\frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{gx_1}{m(k^2 + a^2)}$$

Ora $x_1 = asen\omega$ ed $mx_1 = masen\omega$ dunque

$$(3) \quad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{gasen\omega}{k^2 + a^2}$$

Se supponiamo che la massa m si riduca ad un punto materiale all'estremità di a dovremo far $k=0$ perchè la massa trovandosi nel centro di gravità il suo momento d'inerzia mk^2 rispetto l'asse che vi passa è nullo; onde

$$(4) \quad \frac{d^2\omega}{dt^2} = \frac{g}{L} sen\omega$$

sarà l'equazione pel moto rotatorio di questo caso ove la L è la distanza del punto materiale pesante dal centro di moto. Un corpo pesante che ruota intorno ad un asse si dice pendolo. Se questo corpo è un punto materiale pesante all'estremità di una verga, che si suppone non pesante mobile intorno all'altra estremità di questa, si dice pendolo semplice: se poi è una massa pesante che ruoti si dice pendolo composto. Quindi l'equazione (3) è pel moto del pendolo composto, e la (4) è pel pendolo semplice. Confrontando queste equazioni si vede, che il moto del pendolo composto si riduce a quello del semplice se in questo si prende la verga di lunghezza $L = a + \frac{k^2}{a}$. Quindi questo pendolo farà le oscillazioni nello stesso tempo del pendolo composto. Or per le piccole oscillazioni si è veduto (§. 96) che il tempo della oscillazione è espresso da $T = \pi \sqrt{\frac{a}{g}}$: se dunque in questa, invece di a , si porrà $L = a + \frac{k^2}{a}$ avremo il tempo dell'oscillazione del pendolo composto.

Si vede che il tempo dell'oscillazione del pendolo composto sarebbe lo stesso se invece si prendesse per asse di rotazione l'asse parallelo, che passasse pel centro di gravità perchè la lunghezza $a \rightarrow \frac{k^2}{a}$ del pendolo semplice dello stesso moto non varierebbe.

Si nomina *centro di oscillazione* d'un pendolo composto qualunque punto che fa parte del corpo, e che è legato invariabilmente al corpo il di cui movimento è lo stesso, che se fosse isolato, e fosse obbligato a muoversi pel suo peso intorno allo stesso asse. Dopo ciò tutti i punti della retta condotta parallelamente all'asse di rotazione distante di

$$a \rightarrow \frac{k^2}{a},$$

situata nel piano che passa per l'asse ed il centro di gravità del corpo saranno centri di oscillazione. Essi sono posti al di sotto del centro di gravità di una quantità $\frac{k^2}{a}$.

La distanza del centro di gravità dall'asse, e dalla linea dei centri di oscillazione dando per prodotto k^2 ne siegue che se si prendesse questa ultima per un asse fisso, la prima diventerebbe linea dei centri di oscillazione. La lunghezza del pendolo sarebbe come innanzi ed il suo moto sarebbe identico. Avverrebbe lo stesso se si prendesse per asse di sospensione qualunque altra retta parallela situata alla medesima distanza dal centro di gravità, imperciocchè a , e k^2 non cambierebbero.

In generale il moto sarà lo stesso intorno a tutti gli assi che darebbero la stessa lunghezza al pendolo.

CAPO X.

*Determinazione del momento d'inerzia
dei corpi di figura geometrica.*

116. *Momento d'inerzia d'una retta di data lunghezza rispetto l'asse elevato normalmente ad essa in una sua estremità.* Sia a la lunghezza della retta. L'elemento sia dx essendo x la sua distanza dall'asse. Il momento sarà $\int x^2 dx = \frac{x^3}{3}$, e compiendo l'integrale col porre $x=a$ si ha $\frac{a^3}{3}$. In questo esempio come nei seguenti chiameremo M la massa del sistema. Qui sarà $M = a$ onde il momento d'inerzia si esprimerà per $\frac{1}{3} Ma^2$. Se l'asse fosse elevato sul centro di gravità o sul punto medio della retta il momento d'inerzia sarebbe $\frac{1}{12} a^3$, o $\frac{1}{12} Ma^2$.

117. Si cerca il momento d'inerzia della periferia di un circolo di raggio a rispetto d'un asse condotto pel centro, e normale al piano del circolo. L'elemento essendo ds , e la sua distanza dall'asse $= a$ sarà il momento $\int a^2 ds = a^2 s$ e compiendo l'integrale col porre $s = 2\pi a$ viene il momento $2\pi a^3 = Ma^2$.

Vogliasi il momento d'inerzia della periferia rispetto un diametro. L'elemento è $ds = \frac{adx}{y}$, la sua distanza dal diametro è y ; quindi il momento elementare è $aydx$, ed il totale $\int aydx$: ma $\int ydx$ è l'area del circolo $= \pi a^2$ dunque il momento cercato sarà

$$\pi a^3 = Ma^2$$

118. Si cerca il momento d'inerzia dell'area del circolo rispetto l'asse elevato normalmente dal centro sul piano circolare. Si supponga una distanza qualunque x dal centro, e con questa s'intenda descritta una circonferenza dello stesso centro, ed un'altra di raggio $x+dx$, l'area compresa fra i due detti circoli sarà $2\pi x dx$, e trattandola com'una linea circolare sarà (§. 117) il suo momento $2\pi x^3 dx$. Integrando e compiendo l'integrale facendo $x=a$ sarà il momento cercato $\frac{1}{2}\pi a^4$, o $\frac{1}{2}Ma^2$.

Vogliasi il momento del circolo rispetto il diametro. L'area della zona elementare essendo come sopra $2\pi x dx$. Il momento di essa risulta (§. 117) $\pi x^3 dx$. Integrando e ponendo $x=a$ sarà il cercato momento $\frac{1}{4}\pi a^4 = \frac{1}{4}Ma^2$.

119. Troviamo il momento d'inerzia del parallelepipedo rettangolo i di cui spigoli sono a, b, c prendendo per asse il lato c . Si prendano i lati a, b, c per assi delle x, y, z sarà l'elemento del solido $dx dy dz$, ed il quadrato della sua distanza dall'asse c sarà x^2+y^2 : dunque il momento d'inerzia sarà $\int (x^2+y^2) dx dy dz$. Integrando successivamente rispetto le tre variabili avremo $\frac{1}{3}x^3yz + \frac{1}{3}xy^3z$. Compiendo l'integrale coi porvi a, b, c invece di x, y, z avremo

$$\frac{1}{3}abc(a^2+b^2), \quad \text{ossia} \quad \frac{1}{3}M(a^2+b^2).$$

Passi ora l'asse pel centro di gravità e parallelo a c : disterà da questo di $\frac{1}{4}(a^2+b^2)$. Abbiamo ora (§. 114)

$$\int r'^2 dm = \int r^2 dm + Mk^2$$

dunque il momento domandato

$$\frac{1}{3}M(a^2+b^2) + \frac{1}{4}M(a^2+b^2) = \frac{1}{12}M(a^2+b^2)$$

120. Si domanda il momento d'inerzia d'un solido nato dalla rotazione di una superficie terminata la linea di nota equazione intorno ad un asse e rispetto questo asse. Sia x l'ascissa computata dal vertice della linea data ad un suo puntodi ordinata y . Si consideri il cilindro lo di cui basi hanno per ascisse $x, x+dx$. Questo si potrà considerare come la massa d'un cerchio, onde il suo momento rispetto l'asse normale al centro (§. 118) sarà $\frac{1}{2}\pi x^4 dx$, onde quello del solido sarà $\frac{1}{2}\pi \int y^4 dx$.

121. Applicando questa formola al cilindro, al cono, alla sfera avremo i valori seguenti per li loro momenti d'inerzia.

1.° Pel cilindro di cui r sia il raggio ed a l'altezza

$$\frac{1}{2}\pi r^4 a = \frac{1}{2} M r^2$$

2.° Pel cono di raggio r nella base, e di altezza a

$$\frac{1}{10} \pi r^4 a = \frac{3}{10} M r^2$$

3.° Pel segmento sferico di raggio r e di saetta x

$$\pi x^3 \left(\frac{2}{3} r^3 - \frac{1}{2} r x + \frac{1}{10} r^3 \right)$$

4.° Quindi per l'emisfero

$$\frac{4}{15} \pi r^5 = \frac{2}{5} M r^2$$

e per l'intera sfera

$$\frac{8}{15} \pi r^5 = \frac{2}{5} M r^2$$

122. Si voglia il momento d'inerzia d'un elissoide. Troveremo i momenti relativamente ai tre assi principali. Sia

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

l'equazione. Cerchiamo il momento d'inerzia relativamente all'asse delle x . L'elemento solido è $dx dy dz$ ed il suo momento $(x^2 + y^2) dx dy dz$, integrato rispetto a z avremo

$$z(x^2 + y^2) dx dy,$$

i limiti di z sono

$$z = \pm c \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)}$$

dunque l'integrale del momento fra questi limiti sarà,

$$2c(x^2 + y^2) \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy$$

che si spezza nei due

$$(1) 2cx^2 \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy + 2cy^2 \sqrt{\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}\right)} dx dy$$

Integriamo la prima parte relativamente alla y . Si ponga $b^2 - \frac{b^2 x^2}{a^2} = r^2$ Allora l'integrale della detta prima parte sarà

$$\frac{2cx^2 dx}{b} \int \sqrt{(r^2 - y^2)} dy.$$

L'equazione della sezione dell'ellissoide pel piano x, y , è

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{x^2}{a^2} = 1$$

dunque i due limiti del nostro integrale saranno dati dall'equazione $y = \pm r$: ora $\int \sqrt{(r^2 - y^2)} dy$ essendo la quadratura d'un semicircolo di raggio r sarà $\frac{1}{2}\pi r^2$ dunque rimettendo il valore di r^2 avremo

$$2cx^2 dx \int \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)} dy = \frac{\pi b c}{a^2} (a^2 x^2 - x^4) dx$$

ed integrando da $x = -a$ sino ad $x = a$ si avrà

$$2c \iint x^2 \sqrt{\left(1 - \frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2}\right)} dx dy = \frac{4\pi b^3 ac}{15}.$$

L'integrale dell'altra parte di (1) confrontandola colla prima sarà $\frac{4\pi a^3 bc}{15}$: dunque il momento rispetto l'asse delle x , o

l'asse c sarà $\frac{4\pi abc}{15}(a^2 + b^2)$ la massa M dell'ellissoide è $\frac{4}{3}\pi abc$

dunque il detto momento sarà $\frac{1}{5} M(a^2 + b^2)$. Per analogia i momenti d'inerzia dell'ellissoide relativamente agli assi a , b saranno

$$\frac{1}{5} M(b^2 + c^2), \quad \frac{1}{5} M(a^2 + c^2).$$

Questo solido diventa una sfera quando $a = b = c$, quindi

$$M = \frac{4\pi abc}{3} = \frac{4\pi a^3}{3}$$

ed i tre momenti si ridurranno

$$\frac{8}{15} \pi a^5 = \frac{2}{5} M a^2$$

come al (§. 121).

APPENDICE

123. Espressioni dell'attrazione di un corpo qualunque sopra d'un punto materiale. Sia D un punto fisso interiore al corpo attraente. Da questo punto conduciamo tre assi ortogonali Dx, Dy, Dz: indichiamo con M un punto materiale del corpo attraente di massa dm , e di coordinate x, y, z . Siano α, β, γ , le coordinate del punto materiale O attratto di massa μ , ed u la distanza del punto attraente M al punto attratto O, avremo

$$u^2 = (\alpha - x)^2 + (\beta - y)^2 + (\gamma - z)^2$$

L'attrazione esercitata da dm sopra μ sarà secondo la retta u . Questa forza sarà in ragione diretta delle due masse dm , e μ ed inversa del quadrato della distanza u . Dicendo dunque F questa forza porremo $F = \frac{f\mu dm}{u^2}$, ove f è un coefficiente costante, che esprimerà l'intensità del potere attrattivo relativo all'unità di massa, ed unità di distanza. Le proiezioni della distanza MO sopra i tre assi sono

$$\alpha - x, \quad \beta - y, \quad \gamma - z,$$

quindi

$$\frac{\alpha - x}{u}, \quad \frac{\beta - y}{u}, \quad \frac{\gamma - z}{u}$$

sono i coseni degli angoli che la forza F fa coi tre assi, quindi le sue componenti secondo questi assi saranno

$$\frac{\alpha - x}{u} F, \quad \frac{\beta - y}{u} F, \quad \frac{\gamma - z}{u} F.$$

Se si esprimono con A, B, C queste componenti avremo

$$A = \mu \iiint \frac{\alpha - x}{u} dm \quad B = \mu \iiint \frac{\beta - y}{u} dm$$

$$C = \mu \iiint \frac{\gamma - z}{u} dm$$

Se ρ esprima la densità di dm e dv il suo volume avremo

$$dm = \rho dv$$

Le tre integrazioni in A, B, C si riducono ad una sola se si ponga

$$(1) \quad T = \iiint \frac{dm}{u}$$

facendo i limiti di queste integrazioni gli stessi che i limiti delle integrazioni in A, B, C . Ora la posizione del punto O non ha che far nulla ne' colle integrazioni antecedenti, ne' coi limiti di queste integrazioni, perchè riguardano solo il corpo attrahente: quindi nel valore di T eseguendo le differenziazioni riguardo ed α, β, γ coordinate di O si possono eseguire sotto gl'integrali, perciò avremo

$$\frac{dT}{d\alpha} = \iiint dm d. \frac{1}{u} \frac{d}{d\alpha}; \quad \frac{dT}{d\beta} = \iiint dm d. \frac{1}{u} \frac{d}{d\beta}$$

$$\frac{dT}{d\gamma} = \iiint dm d. \frac{1}{u} \frac{d}{d\gamma}$$

Ora

$$\frac{d}{d\alpha} \frac{1}{u} = -\frac{a-x}{u^3}; \quad \frac{d}{d\beta} \frac{1}{u} = -\frac{\beta-y}{u^3}$$

$$\frac{d}{d\gamma} \frac{1}{u} = -\frac{\gamma-z}{u^3}$$

dunque

$$(2) \quad A = -\mu f \frac{dT}{d\alpha}, \quad B = -\mu f \frac{dT}{d\beta}, \quad C = -\mu f \frac{dT}{d\gamma}$$

124. Applicazione all'attrazione della sfera. L'attrazione di una crosta sferica omogenea e di grossezza costante di centro D sopra il punto O evidentemente si ridurrà all'attrazione diretta secondo DO. Facendo coincidere questa retta coll'asse delle x , le componenti B, C secondo gli assi delle y , z saranno nulle, e non si dovrà calcolare che A. A questo scopo ci serviremo delle coordinate polari come nel (§. 270). Sia r la distanza DM di un punto materiale della crosta dal centro, e θ l'angolo MDO che r fa coll'asse DO delle x . Se per D si fa passare un piano cui DO sia normale si dica ω l'angolo che fa la proiezione di r sul detto piano con una retta fissa, che partendo dal centro O giace su questo piano, e ciò come nel detto paragrafo da cui abbiamo

$$dv = r^2 \sin \theta dr d\theta d\omega$$

per l'elemento del volume del punto materiale M. Pren-

dendo il valore $T = \iiint \frac{dm}{u}$ vi si ponga

$$dm = \rho r^2 \sin \theta dr d\theta d\omega.$$

Abbiamo un triangolo DOM in cui

$$DM = r, \quad OM = u, \quad DO = a,$$

e l'angolo $ODM = \theta$: dunque

$$u^2 = \alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2$$

perciò

$$(3) \quad T = \rho \iiint \frac{r^2 \sin \theta dr d\theta d\omega}{\sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2)}}$$

Ora i limiti dell'integrale relativo ad r sono

$$r = b, \quad r = a,$$

ove b è il raggio della superficie sferica intorno della crosta, ed a il raggio dell'esterna. I limiti di θ sono zero e π , e quelli di ω sono zero, e 2π . Integrando la (3) relativamente ad ω , e tra i detti limiti avremo

$$T = 2\rho\pi \int_b^a \left(\int_0^\pi \frac{r \sin \theta d\theta}{\sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2)}} \right) r dr$$

Ora

$$(4) \int \frac{r \sin \theta d\theta}{\sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2)}} = \frac{1}{\alpha} \sqrt{(\alpha^2 - 2\alpha r \cos \theta + r^2)} + C$$

Ai limiti zero e π il radicale ha i valori

$$\pm (\alpha - r), \quad \pm (\alpha + r):$$

ma poichè esso ci esprime la distanza positiva MO , al limite $\theta = \pi$ si dovrà prendere il suo valore $u = \alpha + r$, ed al limite $\theta = 0$ si dovrà prendere $r - \alpha$, o $\alpha - r$ secondo che il punto attratto M sarà dentro o fuori della crosta. Vedremo poi quel che si deve fare allorchè il punto attratto si troverà nella crosta, talchè in una parte di questa sarà $r > \alpha$, e nell'altra $r < \alpha$.

Se ora l'integrale (4) si porta fra i limiti, ma per un punto interiore esso ci darà

$$\frac{1}{\alpha} [(r + \alpha) - (r - \alpha)] = 2$$

quindi il valore di T non dipenderà da α , perciò il valore di A dipendente dalla derivata di T relativamente ad α sarà zero, quindi un punto interno alla crosta risente attrazioni che danno una risultante nulla.

Lo stesso integrale (4) portato ai limiti, ma per un punto attratto fuori della crosta ci darà

$$\frac{1}{\alpha} [(\alpha + r) - (\alpha - r)] = \frac{2r}{\alpha} :$$

dopo ciò avremo

$$T = \frac{4\pi\rho}{\alpha} \int_b^a r^2 dr = 4 \frac{\pi\rho(a^3 - b^3)}{3\alpha} \quad \text{ossia} \quad T = \frac{M}{\alpha}$$

essendo M la massa della crosta sferica, il di cui volume è $\frac{4\pi(a^3 - b^3)}{3}$. In questo valore di T prendendo la derivata relativamente ad α si sostituisca in A , avremo

$$A = \mu \frac{Mf}{\alpha^2}$$

che esprime la stessa attrazione di tutta la massa riconcentrata nel centro: quindi l'attrazione di tutta la crosta, ed anche della sfera intiera su d' un punto esteriore è la stessa come se tutta la massa fosse riunita nel centro.

Se il punto attratto è nella crosta in tal caso dividendo questa in due per mezzo di una superficie sferica che passi pel detto punto e che abbia per centro il punto D centro della crosta si troverà dentro la crosta superiore, o sopra l'inferiore. Dalle superiori risentirà attrazione di risultante nulla, e dalla inferiore attrazione come se la massa fosse riunita nel centro. Supponiamo ora, che questa crosta sottoposta diventi una sfera di raggio a , l'attrazione sperimentata dal punto O essendo espressa da

$$A = \frac{\mu m f}{a^2}, \quad \text{ed essendo} \quad m = \frac{4\pi\rho a^3}{3} \quad \text{sarà} \quad A = \frac{4\pi\mu f \rho a}{3}$$

cioè l'attrazione sarà proporzionale alla distanza a del punto attratto dal centro. Da tutto ciò si ricava che le attrazioni di una sfera per punti fuori sono in ragione inversa del quadrato delle distanze dei detti punti dal suo centro; che le attrazioni della sfera su punti le di cui distanze sono piccole relativamente al raggio della sfera sono costanti potendosi dire che sono in ragione inversa del quadrato del raggio della sfera che finalmente le attrazioni d'una sfera per punti che si muovono dentro di essa, sono come la distanza del punto del centro.

125. Trovare la curva tra tutte quelle dello stesso perimetro, che ha il centro di gravità il più basso.
Avevamo (§. 102)

$$U = \int X dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \quad e \quad dy = \frac{adx}{\sqrt{(X^2 - a^2)}}$$

Poniamo in queste $X + c$ in luogo di X avremo

$$U = \int X dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} + c \int dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}},$$

$$(a) \quad dy = \frac{adx}{\sqrt{[(X + c)^2 - a^2]}}$$

poichè il secondo integrale contenuto in U è la lunghezza della curva cercata, ne segue che l'equazione (a) servirà a determinare tra tutte le curve della stessa lunghezza quella che corrisponde al massimo o minimo del primo integrale cioè

$$\int X dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}$$

Se si dice l la lunghezza data, e comune a tutte le curve sarà

$$dx \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} = l$$

condizione alla quale si soddisferà per mezzo della costante indeterminata c , che è stata introdotta nella formola (a). Andiamo ora a risolvere il problema proposto. Siano A, C i punti ai quali termina una curva qualunque posta al di sotto d'una orizzontale che passi per A. Per A si conduca un asse orizzontale Ay' ed uno verticale Ax' secondo la gravità. Siano x' , y' le coordinate di un punto M della curva. Si dica x , la distanza del centro di gravità della curva qualunque AMC dall'asse Ay' sarà

$$lx_1 = \int_0^b x' dx' \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}$$

ove b è il valore di x' del punto C, ed l è lunghezza della curva cioè

$$l = \int_0^b \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}} dx'$$

quindi l'equazione differenziale della curva in cui l'integrale $\int X u dx$ (§. 102) è un massimo o in cui è un massimo

$$\int_0^b x' dx' \sqrt{1 + \frac{dy'^2}{dx'^2}}$$

è $dy' = \frac{c' dx'}{\sqrt{(x' + c)^2 - c'^2}}$ perchè nel nostro caso $X = x'$.

Integrando ed avvertendo che nel nostro caso x' , y' sono nulle allo stesso tempo sarà

$$y' = c \left(\frac{x' + c \sqrt{(x' + c)^2 - c'^2}}{c + \sqrt{c^2 - c'^2}} \right)$$

e quindi

$$(a) \quad x' + c + \sqrt{[(x' + c)^2 - c'^2]} = \frac{y'}{\gamma e^{c'}}.$$

facendo

$$(1) \quad c + \sqrt{(c^2 - c'^2)} = \gamma :$$

si ricava eziandio

$$(b) \quad x' + c - \sqrt{[(x' + c)^2 - c'^2]} = \frac{y'}{\gamma e^{c'}}.$$

ponendo

$$(2) \quad c - \sqrt{(c^2 - c'^2)} = \gamma' :$$

sommando le (a), (b) avremo

$$(c) \quad x' + c = \frac{1}{2} \gamma e^{\frac{y'}{c'}} + \frac{1}{2} \gamma' e^{\frac{y'}{c'}} ,$$

che sarà l'equazione della curva della proprietà domandata.

Per conoscere qual sia si supponga un punto di coordinate

$$x' = b, \quad y' = a .$$

Si prenda poi una indeterminata ε , e cambiamo le coordinate x', y' in altre x, y talchè sia

$$x' + c = -y, \quad y' = \varepsilon - x ,$$

per questo cambiamento l'equazione (c) diventerà

$$(d) \quad y = -\frac{1}{2} \gamma e^{\frac{\varepsilon}{c'}} \cdot \frac{x'}{e^{c'}} - \frac{1}{2} \gamma' e^{\frac{\varepsilon}{c'}} \frac{x'}{e^{c'}}$$

La ε sia tale che dia l'equazione

$$\gamma e^{\frac{x}{c'}} = \gamma' \bar{e}^{\frac{x}{c'}},$$

e sia $-h$ il valore comune di queste due quantità onde abbiasi

$$\gamma e^{\frac{x}{c'}} = -h, \quad \gamma' \bar{e}^{\frac{x}{c'}} = -h.$$

Avendosi da questa $\gamma\gamma' = h^2$, e dallo (1), (2) $\gamma\gamma' = c'^2$ sarà $h = c'$ e l'equazione (d) della curva diverrà

$$y = \frac{1}{2}h(e^{\frac{x}{c'}} + \bar{e}^{\frac{x}{c'}}),$$

che è (§. 136) l'equazione della catenaria.

Esercizii.

1.° Un punto materiale è animato da forza ripulsiva che lo spinge in ragione della potenza n^{ma} dal centro partendo dalla quiete, trovare la sua velocità e tempo giunto ad una distanza x dal centro.

Sia μ la forza ripulsiva all'unità di distanza, ed x la distanza del mobile dal centro delle forze.

Abbiamo

$$u du = \mu x^n dx$$

d'onde

$$u^2 = \frac{2\mu}{n+1} x^{n+1}.$$

Essendo

$$\frac{dx}{dt} = u,$$

avremo

$$t = \frac{2}{1-n} \sqrt{\frac{1-n}{2\mu}} \times x^{\frac{1-n}{2}}.$$

2.º Un punto materiale è attratto verso un centro fisso da una forza inversamente proporzionale all' n^{ma} potenza della distanza. Trovare qual deve essere il numero n affinchè la velocità che il mobile acquista venendo verso il centro da una distanza indefinita alla distanza a sia uguale a quella che avrebbe acquistato venendo da una distanza a alla distanza $\frac{1}{4} a$.

Siano v' la velocità acquistata nel primo moto, v'' quella acquistata nel secondo, x la distanza del mobile dal centro di attrazione, e μ l'attrazione esercitata all'unità di distanza.

Avremo

$$v \frac{dv}{dx} = -\frac{\mu}{x^n}.$$

e da questa

$$v'^2 = -2\mu \int_x^a \frac{dx}{x^n} = \frac{2\mu}{(n-1)a^{n-1}}$$

e per la seconda velocità v'' avremo

$$v''^2 = -2\mu \int_a^{\frac{1}{4}a} \frac{dx}{x^n} = \frac{2\mu}{n-1} \left(\frac{4^{n-1}}{a^{n-1}} - \frac{1}{a^{n-1}} \right),$$

dovendo essere uguali le due velocità v' , v'' avremo

$$1 = 4^{n-1} - 1 :$$

d'onde

$$2 = 4^{n-1} ; \quad 2 = 2^{2n-2} ,$$

che si verifica ponendo $2n-2=1$ da cui $n=\frac{3}{2}$.

3.° Un punto materiale che si muove secondo una retta è attratto da una forza proporzionale alla distanza verso un centro che si muove secondo la medesima retta con una velocità costante. Si conoscono le distanze iniziali a, a' dei due punti da uno fisso nella retta come anche le velocità iniziali β, β' . Trovare la posizione del punto materiale in un tempo qualunque.

Sia x la distanza del punto materiale dal punto fissato nella retta ad un tempo qualunque t , e μ l'attrazione all'unità di distanza. Servendosi dell'equazione

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \varphi$$

avremo

$$x = a + \beta t + \frac{\beta' - \beta}{\sqrt{\mu}} \operatorname{sen}(t \sqrt{\mu}) + (a' - a) \cos(t \sqrt{\mu}) .$$

Se è tutto come nel problema antecedente, e solo si suppone repulsiva la forza si troverà

$$x = a + \beta t - \left[\sqrt{\mu}(a - a') + (\beta - \beta') \right] \frac{e^{t\sqrt{\mu}}}{2\sqrt{\mu}} \\ - \left[\sqrt{\mu}(a - a') - (\beta - \beta') \right] \frac{e^{-t\sqrt{\mu}}}{2\sqrt{\mu}} .$$

4.° Un corpo è attratto in ragione inversa del cubo della distanza verso un centro fisso, questo centro essendo attorniato da una atmosfera, la di cui intensità è inversamente proporzionale al cubo della distanza dal centro mentre la resistenza di questo varia come il quadrato della velocità. Determinare la velocità del corpo ad una distanza qualunque del centro.

Sia a la distanza del mobile dal centro al principio del moto; dopo il tempo t questa distanza sia diventata x : k rappresenti la resistenza del mezzo per l'unità di velocità all'unità di distanza, e μ l'attrazione all'unità di distanza.

Le forze essendo due dirette oppostamente e sulla medesima retta abbiamo facilmente

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{\mu}{x^3} + \frac{k}{x^3} \cdot \frac{dx^3}{dt^3}.$$

dalla quale, se si pone

$$\frac{1}{x^3} = z.$$

si deduce

$$d \cdot v^3 + k v^3 dx = \mu dx,$$

il cui integrale completo è

$$v^3 = \frac{\mu}{k} \left[1 - e^{-k \left(\frac{1}{x^3} - \frac{1}{a^3} \right)} \right].$$

5.º Una palla pesante, perfettamente elastica, cade da una altezza nota sopra un piano orizzontale, e rimbalza più volte di seguito in un mezzo omogeneo, la cui resistenza è proporzionale al quadrato della velocità. Determinare l'altezza alla quale la palla s'inalzerà dopo un dato numero di rimbalzi.

Sia a , l'altezza iniziale da cui cade la palla, e generalmente a_{n+1} sia l'altezza alla quale s'inalza dopo n rimbalzi. Si dica B il volume della palla, ρ la sua densità, ρ' quella del mezzo, e k la resistenza dello stesso mezzo per una velocità eguale all'unità.

Il peso di un corpo in un mezzo pesante è uguale al peso di questo corpo nel vuoto diminuito del peso del mezzo

spostato; perciò se si considera la palla nella sua discesa, e se si prende il punto di partenza per origine della distanza x , l'equazione del moto sarà

$$v \frac{dv}{dx} = \frac{Bgp - Bg\rho'}{B\rho} - kv^2,$$

dalla quale si ricava

$$\frac{1}{2k} \log \frac{g'}{g' - kv^2} = x, \quad \text{ove } g' = g \left(1 - \frac{\rho'}{\rho}\right)$$

Quindi la velocità v_n del mobile all'istante del suo n^{esimo} urto è data da

$$(1) \quad \frac{k}{g} v_n^2 = 1 - e^{-2kx_n}.$$

Considerando ora la salita che siegue questo urto n^{esimo} , e rappresentando per x l'altezza del mobile al disopra del piano, si troverà

$$v \frac{dv}{dx} = -g' - kv^2,$$

dalla quale

$$\frac{1}{2k} \log \left(1 + \frac{k}{g'} v^2\right) = a_{n+1}.$$

E per l'istante nel quale principia l'ascensione si avrà

$$(2) \quad \frac{k}{g} v_n^2 = e^{2ka_{n+1}} - 1.$$

Dalla coesistenza delle (1) e (2) si trae

$$a_{n+1} = \frac{1}{2k} \log \frac{(n+1)e^{2ka_1} - n}{ne^{2ka_1} - n+1}$$

per espressione del valore dell'altezza del *n*^{esima} rimbalzo.

Se al principio la palla cadesse da un'altezza grandissima, ponendo $a_1 = \infty$ l'antecedente valore avrebbe per limite

$$a_{n+1} = \frac{1}{2k} \log \frac{n+1}{n}.$$

E qualora l'espressione generale si ponga sotto la forma

$$a_{n+1} = \frac{1}{2k} \log \frac{(e^{2ka_1} - 1) + \frac{e^{2ka_1}}{n}}{(e^{2ka_1} - 1) + \frac{1}{n}},$$

ne risulta che l'altezza del rimbalzo va diminuendo col crescere di n , e che tende al limite zero.

6.° Un centro di attrazione è attorniato da un mezzo la cui densità varia colla distanza secondo una data legge, e la sua resistenza è proporzionale al quadrato della velocità. Determinare la intensità dell'attrazione di questo centro su di un punto materiale, affinché questo abbandonato a se stesso impieghi sempre il medesimo tempo per giungere al centro qualunque sia il punto di sua partenza.

Sia a la distanza del punto materiale dal centro attrahente nell'istante in cui principia il moto; dopo un tempo t questa distanza sia diventata x , F dicasi la forza attrahente, e ρ la densità del mezzo, la quale dev'essere una funzione della x .

La forza attrahente è diretta al centro, e la resistenza è ad essa opposta, dunque l'equazione del moto è

$$v \frac{dv}{dx} = -F + \rho v^2.$$

Se questa si moltiplica per $2e^{-2\int p dx}$ prende la forma

$$d(e^{-2\int p dx} v^2) = -2e^{-2\int p dx} F dx,$$

ed

$$e^{-2\int p dx} v^2 = -2\int e^{-2\int p dx} F dx + \text{costan.}$$

Si determina la costante colla condizione che sia $v = 0$, quando $x = a$. Per comodo si ponga

$$X = 2\int_a^x e^{-2\int p dx} F dx, \quad A = 2\int_a^a e^{-2\int p dx} F dx,$$

ne risulta

$$v = e^{\int p dx} \sqrt{(A - X)}$$

e quindi

$$dt = \frac{e^{-\int p dx} dx}{\sqrt{(A - X)}}.$$

Se poniamo

$$(1) \quad e^{\int p dx} \frac{dX}{dx} = P,$$

otterremo

$$dt = \frac{dX}{P \sqrt{(A - X)}},$$

e la durata della caduta del corpo sarà data dalla formola

$$t = \int_a^A \frac{dX}{P \sqrt{(A - X)}}.$$

Giacchè il secondo membro deve essere indipendente dalla distanza iniziale a , o ciò che equivale, deve essere indipendente da A , è necessario che la quantità compresa sotto il segno $\int$ sia di grado zero rispetto A , X e dX . Perchè questo si verifichi P deve essere una funzione omogenea, e di grado 1 per rapporto ad X ed A ; ma per la (1), P

è indipendente da A ; dunque il solo valore che possa convenire a questa quantità è

$$P = \frac{\sqrt{X}}{\beta},$$

essendo β una costante.

Dopo ciò la (1) ci dà

$$\beta \frac{dX}{\sqrt{X}} = e^{-\int \rho dx} dx,$$

e perchè X , ed x sono nulli nello stesso tempo sarà

$$2\beta \sqrt{X} = \int_0^x e^{-\int \rho dx} dx.$$

Elevando al quadrato e ponendo per X il suo valore troveremo

$$8\beta^2 \int_0^x e^{-\int \rho dx} F dx = \left[\int_0^x e^{-\int \rho dx} dx \right]^2,$$

Differenziando ed isolando F troviamo

$$F = \frac{1}{4\beta^2} e^{\int \rho dx} \int_0^x e^{-\int \rho dx} dx,$$

onde data la legge della densità del mezzo si conosce la F .

Lorquando $\rho = 0$, cioè quando ha luogo il vuoto perfetto

$$F = \frac{x}{4\beta^2}:$$

e lorchè ρ è una costante, il che ha luogo se il mezzo è omogeneo; è

$$F = \frac{1}{4\beta^2 \rho} (e^{\rho x} - 1).$$



205366

INDICE

Prefazione. » III a IV

PROEMIO

1. Natura dell' inerzia. - 2. Definizione della forza.
3. Difficoltà contro la definizione più semplice della
inerzia. - 4. Definizione più semplice della forza.
5. Tempo in cui s' intende agire la forza. - 6.
Definizione del moto. - 7. Spazio nel moto. - 8.
Tempo. - 9. Velocità. - 11. Costituenti della for-
za. - 12. Rappresentanza della forza. - 13. Le
rette rappresentanti le forze possono variare in un
costante rapporto. - 14. Rappresentanza geome-
trica e di calcolo delle forze. - 15. Corpi a cui
sono applicate le forze. - 16. Sistemi di forze. -
17. Equilibrio. - 18. Scopo della Meccanica. -
19. Dei costituenti del moto. - 20. Distinzione dei
moti. - 21. Moto progressivo. - 22. Moto rota-
torio. - 23. Partizione della Meccanica. . pag. 1 a 8

PARTE PRIMA

Dinamica

CAPO I.^o *Composizione e decomposizione delle forze applicate ad un punto.* — 1. Risultante e componenti. — 2. Equilibrio delle forze applicate ad un punto. — 3. Assioma dell'equilibrio delle forze.

4. Casi nei quali si conosce la risultante delle forze applicate ad un punto. - 5. Traslazione di una forza. - 6. Altra maniera di enunciare il teorema della traslazione di una forza. - 7. Definizione della risultante di due forze angolari eguali. - 8. Si ricava la risultante in un numero qualunque di forze in equilibrio applicate ad un punto. - 9. Si trova la risultante di due forze applicate ad un punto. - 11. Analisi della trovata risultante. - 12. Proprietà geometriche del triangolo trasportato nel parallelogrammo delle forze. - 13. Si enunciano problemi sul parallelogrammo delle forze relativi a quelle del triangolo. - 14. Equazioni trigonometriche del parallelogrammo delle forze. - 15. Tre forze applicate ad un punto non nello stesso piano. - 16. Risultante di un numero qualunque di forze applicate ad un punto. - 17. Poligono rappresentante le forze applicate ad un punto. - 18. Proprietà algebrica del poligono trasformato nelle forze applicate ad un punto. - 19. Calcolo della risultante delle forze applicate ad un punto. - 20. Teorema di geometria analitica ricavato dalla teoria delle forze. - 21. Altra rappresentanza del valore della risultante di forze qualunque applicate ad un punto. - 22. Dalla teoria delle forze si ricava il valore della diagonale del parallelepipedo. - 23. Perdita delle forze quando due sono congiunte ad angolo. »
- CAP. II.° Forze parallele.** — 24. Risultante di due forze parallele. - 25. Relazione delle due componenti e risultante parallele. - 26. Risultante di due forze parallele opposte. - 27. Centro delle forze parallele. - 28. Caso in cui non esiste la risultante delle forze parallele. - 29. Maniera algebrica e geometrica di trovare il centro di due forze parallele dirette o no per lo stesso verso. - 30. Risultante di un numero qualunque di forze parallele. - 31. Metodo algebrico di trovare il

9 a 23

centro delle forze parallele. - 32. Punto di applicazione delle forze parallele in un piano, o retta. - 33. Centro delle forze nel piano, asse, e centro dei momenti. - 34. Momenti negativi. - 35. Forze parallele opposte » 23 a 31

CAP. III.° *Centro di gravità.* — 36. Espressione in calcolo, e direzione della gravità. - 37. Centro di gravità e maniera di determinarlo. - 38. Peso dei corpi. - 39. Come si valuta la gravità. - 41. Determinazione del centro di gravità dei corpi omogenei ridotto al caso delle figure geometriche. - 42. Centro di gravità della retta. - 43. Centro di gravità del rettangolo. - 44. Centro di gravità del circolo e del poligono regolare. - 45. Centro di gravità del triangolo. - 46. Centro di gravità di tre pesi eguali applicati ai vertici di un triangolo. - 47. Centro di gravità del trapezio. - 48. Centro di gravità di un arco circolare. - 49. Centro di gravità di mezza circonferenza. - 50. Centro di gravità di un settore. - 51. Centro di gravità di un semicircolo. - 52. Centro di gravità della piramide. - 53. Centro di gravità del prisma. - 54. Centro di gravità di un tronco di piramide. » 31 a 45

CAP. IV.° *Proprietà generali del centro di gravità.* 55. Prima proprietà. - 56. Seconda proprietà. - 57. Altra prova della proprietà antecedente. - 58. Terza proprietà. - 59. Quarta proprietà. - 60. Quinta proprietà. - 61. Sesta proprietà. - 62. Settima proprietà. - 64. Applicazione dei due teoremi antecedenti. » 45 a 59

CAP. V.° *Teoria delle coppie.* — 66. Si dichiara ciò che s'intende per coppia. - 67. Traslocamento delle coppie. - 68. Equivalenza delle coppie. - 69. Relazioni dei valori delle coppie. - 71. Valore numerico delle coppie. - 72. Composizione e decomposizione delle coppie. - 73. Decomposizione di una coppia. - 73. Risultante di coppie congiunte angolo. - 75. Rappresentanza delle coppie per

mezzo delle rette, come semplici forze. Rappresen-	
tanza della posizione della copia. — 76.	
Rappresentanza della coppia. — 77. Rappresen-	
tanza del senso di agire delle coppie. — 78.	
Composizione di due coppie rappresentate da due	
assi congiunti ad angolo. — 79. Traslazione delle	
forze coll' intervento delle coppie. — 80. Risul-	
tante di un sistema qualunque di forze. — 81.	
Coppia risultante normale alla forza risultante è	
la minima. — 82. Condizione per l' equilibrio di	
un sistema qualunque di forze. — 83. Condizione	
perchè un sistema qualunque di forze abbia una	
risultante. — 84. Condizione in calcolo per la esi-	
stenza della risultante di un sistema qualunque. —	
85. Delle coppie o momenti relativi a diversi	
assi. »	59 a 77
CAP. VI.° <i>Esercizii</i> »	78 a 86

PARTE SECONDA

Statica

CAP. I.° <i>Formole generali dell'equilibrio</i> . — 2. Con-	
dizioni dell'equilibrio poste in equazioni. — 4. Al-	
tra maniera di esprimere in calcolo le condizioni	
di equilibrio — 5. Deduzione del caso che le forze	
concorrano in un punto. — 6. Caso che le forze	
non formino che coppie. — 7. Ricerca della risul-	
tante delle forze P' , P'' , P''' , ... quando non	
sono in equilibrio, e condizione per la sua esi-	
stenza. — 8. Caso delle forze parallele dedotto dalle	
equazioni antecedenti. »	87 a 93
CAP. II.° <i>Equilibrio delle forze nelle macchine</i> — 9. De-	
finitione della macchina. — 10. Attrito. — 11. Elementi	
che influiscono sull'attrito. — 12. Attrito della prima	
specie. — 23. Attrito di seconda specie. — 26. Attrito	

to della terza specie. - 30. Leva. - 31. Distinzione delle leve. - 36. Carrucola. - 38. Girella mobile. - 39. Bilancia. - 40. Condizioni per la perfezione della bilancia. - 43. Graduazione della stadera. - 44. La teoria della stadera si ricava da quella delle coppie. - 46. Condizione generale per l'equilibrio di rotazione intorno all'asse. - 47. Equilibrio nell'argano e nella burbera. - 49. Machine composte. - 50. Prima specie di combinazione di girelle. - 52. Seconda specie di combinazione di girelle. - 55. Terza specie di combinazione di girelle. - 56. Ruote dentate. - 57. Condizione dell'equilibrio nel sistema delle ruote dentate. - 58. Uso dell'equazione di equilibrio delle ruote dentate. - 59. Equazioni per i giri delle ruote. - 60. Uso dell'equazione antecedente. - 62. Idea delle macchine semplici. - 63. Piano inclinato. - 64. Equazione di equilibrio nel piano inclinato. - 66. Caso della potenza parallela alla base, e alla lunghezza del piano inclinato. - 67. L'equilibrio nel piano inclinato si riduce all'equilibrio di una leva. - 68. La vite. - 70. Condizione di equilibrio nella vite. - 71. Vite perpetua. - 72. Cuneo. . . » 94 a 123

CAP. II.° Equilibrio nelle macchine considerate le resistenze. — 74. Resistenza prodotta dalla rigidità delle funi. - 81. Attrito nel piano inclinato. - 88. La vite. - 89. Equilibrio di una potenza con un peso da essa sostenuto con una fune applicata ad una curva considerandovi l'attrito. - 90. Caso della curva circolare. - 94. La leva. - 95. Caso di più leve. - 96. Argano. - 98. Troclea. - 99. Taglia. - 101. Sistema di ruote dentate. . . » 123 a 136

CAP. IV.° Equilibrio nel poligono e curva funicolare. — 106. Tensione. - 107. Condizione per l'equilibrio delle forze nel poligono funicolare. - 108. Espressione in equazione della detta condizione. - 109. Caso in cui la forza è scorrevole nel poligono. -

110. Caso del poligono funicolare in cui le forze dividono in mezzo gli angoli ai vertici dei quali sono applicate. - 112. Caso della fune tesa sopra punti. - 114. Fune tesa sul convesso di una curva. - 115. L'equilibrio delle forze in un poligono funicolare rimane quando le forze sieno applicate ad un punto rimanendo parallele alle loro primitive posizioni. - 116. Risultante delle forze da un estremo fino ad una forza qualunque nel poligono. - 117. Caso in cui si può trovare il punto per dove passa la direzione della risultante delle forze applicate al poligono funicolare. » 137 a 142

CAP. V.° Poligono funicolare di forze parallele. —
119. Le forze parallele sono tutte in un piano col poligono funicolare. - 120. Tensione orizzontale. - 121. Tensione assoluta. - 122. Valore di un numero qualunque di forze. - 123. Proprietà della curva funicolare. - 124. Caso particolare del poligono. - 125. Poligono di lato rigidi. . . » 142 a 146

CAP. VI.° Della curva catenaria. — 126. La curva catenaria o semplicemente catenarie. - 127. Teorema fondamentale della catenaria. - 128. Equazione generale della catenaria. - 129. Uso dell'equazione generale. - 130. Equazione per la tensione assoluta cd orizzontale. - 131. Problemi della seconda specie. - 132. Problemi della seconda specie. - 133. Problemi della prima specie. - 134. Una catenaria è animata nei suoi punti da forze, che sono come l'elevazione di questi punti sul punto più basso, trovare l'equazione di questa curva. - 135. Catenaria omogenea. Rettificazione di essa. - 136. Equazione della catenaria. - 138. Dove la catenaria si confonda colla cicloide e colla parabola. . . . » 146 a 153

CAP. VII.° Equilibrio e spinta dei poligoni. — 141. Poligono triangolare. - 143. Poligono quadrangolare. - 144. Poligono pentagono. - 146. Poli-

gono di qualunque numero di lati. - 148. Sforzo che le travi possono soffrire per l'azione delle forze » 153 a 160

CAP. VIII.° Resistenza dei solidi contro le diverse maniere di agire delle forze su di essi. — 150. Resistenza del solido contro la forza che tende a strapparli. - 153. Resistenza dei solidi alla rottura, essendo fissi in una estremità. - 154. Applicazione. - 155. Confronto delle due resistenze. - 156. Si considera il peso della trave. - 157. Altra ipotesi. - 158. Si trova l'equazione della figura che un solido prende nell'incurvarsi nello stato prossimo alla rottura, e ciò giusta la seconda ipotesi. - 160. Resistenza dei solidi allo spezzamento essendo sostenuti nelle due sue estremità. 162. Caso che il peso non sia nel mezzo. - 164. Se si vuole tener conto anche del proprio peso V della trave. - 165. Resistenza dei solidi alla compressione. - 166. Equazione della curva in cui si piega il solido cedendo alla compressione. - 167. Abbia la colonna la forma di un parallelepipedo. » 161 a 171

CAP. IX.° Equilibrio degli archi col solo contrasto delle parti. — 169. Come è formato l'arco e sue denominazioni. - 171. Riduzione dell'arco al più semplice. - 172. Condizione dell'equilibrio dell'arco. - 173. Rappresentanza geometrica e valori delle forze nell'arco. — 175. Condizioni dell'equilibrio dell'arco tradotta in calcolo. - 176. Valori delle pressioni. - 177. Pressioni orizzontali nell'arco. - 178. Peso di una porzione qualunque dell'arco cominciando dalla chiave. - 183. Applicazione delle teorie antecedenti. - 184. Altra applicazione. - 185. La seconda condizione dell'equilibrio degli archi. - 186. Per vedere geometricamente espressa questa condizione. - 187. Applicazione alla piattabanda. - 189. Confronto fra l'equilibrio dell'arco e quello del poligono funi-

colare rigido. - 191. Formola generale dell'equilibrio degli archi. - 192. Analisi dell'equazione. - 193. Tagli dei cunei normali all'intradosso. Natura di questo. - 195. Raggio osculatore dato in coordinate. - 196. Equazione generale modificata pel caso dei tagli normali. - 199. Applicazione. - 200. Caso in cui da se si verifica la seconda condizione dell'equilibrio degli archi. 171 a 189

CAP. X.^o *Equilibrio delle Cupole.* — 203. Condizione fondamentale dell'equilibrio delle cupole. - 205. Si calcola il peso del cuneo elementare della cupola. - 206. Si ricava l'equazione per la prima specie di problemi. - 207. Applicazione. - 208. Data la curva generatrice della cupola e data la scala delle grossezze si trova la condizione algebrica per l'equilibrio. 190 a 196

CAP. XI.^o *Dell'equilibrio delle volte avendo riguardo all'attrito.* — 211. Limiti dentro i quali deve trovarsi il peso di un arco nel caso dell'attrito. » 196 a 199

CAP. XII.^o *Dell'equilibrio delle volte avendo riguardo alla tenacità dei cementi.* » 199 a 203

CAP. XIII.^o *Dell'equilibrio dei piedritti.* — 221. Si trova la resistenza del piedritto, ed il momento della resistenza. - 223. Applicazione dei risultati antecedenti. » 203 a 206

CAP. XIV.^o *Rinforchi dei piedritti.* — 230. Trovare la resistenza d'un muro a scarpa contro la spinta orizzontale, ed il momento della resistenza. - 236. Trovare la resistenza d'un muro esternamente difeso da controforti parallelepipedi, uguali ed equidistanti, ed il momento della resistenza. » 206 a 209

CAP. XV.^o *Della spinta dei terrapieni.* — 250. Spinta del terrapieno. » 209 a 212

CAP. XVI.^o *Dalla fermezza dei modelli.* » 212 a 216

CAP. XVII.^o *Equazione generale dell'equilibrio dedotta dalla considerazione delle velocità virtuali.* — 282. Idea delle velocità virtuali. - 283. Velocità

virtuali stimate nel senso delle forze. - 284. Il teorema generale dell'equilibrio espresso in velocità virtuali. - 285. Dimostrazione dell'equazione generale dell'equilibrio. - 289. Valori in coordinate delle velocità stimate. - 290. Dall'equazione generale si deducono l'equazioni per l'equilibrio del moto progressivo. - 291. Risultante di due forze congiunte ad angolo. - 293. Equilibrio di rotazione. - 294. Si danno le variazioni delle coordinate in rotazioni minime del sistema intorno agli assi coordinati. - 296. Si dimostra che qualunque rotazione minima intorno ad un punto equivale a tre rotazioni minime intorno agli assi coordinati. - 298. Equazioni di condizione per l'equilibrio di rotazione di un sistema qualunque. - 299. Condizione algebrica perchè un sistema di punti disposti con contiguità geometrica sia invariabile. - 300. Espressioni delle variazioni delle coordinate pel moto minimo qualunque del sistema continuo invariabile. - 302. Formola generale dell'equilibrio tradotta al caso dei sistemi di punti contigui. - 303. Equazioni di condizione per l'equilibrio di un sistema continuo di forze. » 216 a 237

CAP. XVIII.° Equazioni di condizione per un sistema di forze in equilibrio. — 304. Differenziale d'una retta normale ad una superficie qualunque. - 305. Equazioni di condizione. - 307. Dalle condizioni alle quali è assoggettato il sistema si ricavano le forze. - 308. Applicazione. - 309. Caso in cui il punto materiale è obbligato a stare sopra una linea qualunque. » 237 a 242

CAP. XIX.° Del poligono funicolare. — 310. Equazione dell'equilibrio. - 312. Proprietà del poligono ricavate dalle equazioni. - 313. Si ricavano dai moltiplicatori le tensioni del poligono. » 242 a 247

- CAP. XX.^o *Equilibrio d'un filo flessibile ed inestensibile.* — 316. Equazioni d'equilibrio. - 318. Catenaria. » 247 a 250
- CAP. XXI.^o *Della lamina elastica.* — 322. Angolo di contingenza. - 324. Equazione della lamina curva in equilibrio. - 325. Valore dell'elasticità. - 326. Col dato valore dell'elasticità si trova l'equazione della lamina. - 327. Lamina curvata da forze alle estremità. - 328. Caso della lamina a semplice curvatura. - 329. Se si supponga che la lamina sia curvata dal solo peso verticale. - 331. S'immagini una lamina fermata in una estremità sul suolo, e curvata dal peso A , secondo l'asse delle x verticali all'altra estremità. » 250 a 259
- CAP. XXII.^o *Formole generali per determinare il centro di gravità delle figure.* — 339. Centro di gravità di una linea qualunque. - 340. Applicazione. - 341. Linea a semplice curvatura. - 342. Applicazione. - 344. Formola per trovare il centro di gravità delle linee poste simmetricamente rispetto l'asse delle ascisse. - 345. Applicazioni. 348. Formola generale del centro di gravità di un area plana posta simmetricamente rispetto l'asse delle ascisse. - 349. Diamo la stessa in coordinate polari. - 350. Applicazioni. - 353. Si danno l'equazioni per la determinazione del centro di gravità di una superficie qualunque. - 355. Applicazioni. - 358. Altra formola per la determinazione del centro di gravità di una superficie plana. - 360. Applicazione. - 361. Equazione pel centro di gravità della superficie di rivoluzione. - 362. Applicazioni. - 367. Equazioni pel centro di gravità di una superficie qualunque. - 368. Applicazione. - 369. Equazioni per li centri di gravità dei solidi. - 373. Applicazioni. - 376. Formola pel centro di gravità di un solido posto simmetricamente rispetto un asse e terminato da basi

parallele. 377. Applicazione. — 378. Teorema di Goldini. — 379. Riflessione sul teorema di Goldini.	» 259 a 287
CAP. XXIII. ^o <i>Equilibrio stabile ed instabile di un sistema pesante.</i> — 380. Definizione dell'equilibrio stabile ed instabile. — 381. Applicazioni.	» 288 a 291
CAP. XXIV. Esercizi.	» 291 a 296

PARTE TERZA

Cinamica.

CAP. I. ^o <i>Equazioni generali del moto.</i> — 3. Moto uniforme. — 5. Moto uniformemente accelerato. — 7. Equazioni generali del moto. — 9. Riflessione sulle avute equazioni generali. — 11. Equazioni per ogni teorema o problema di moto.	» 297 a 300
CAP. II. ^o <i>Moto uniformemente accelerato.</i> — 22. Valore della forza nel moto uniformemente accelerato. — 24. Valore della gravità. — 26. Considerazioni sul valore della gravità. — 27. Equazioni del moto uniformemente ritardato. 28. Durata del moto uniformemente ritardato. — 29. Proprietà del moto uniformemente ritardato.	» 300 a 304
CAP. III. ^o <i>Altri moti rettilinei.</i>	» 305 a 306
CAP. IV. ^o <i>Moto verticale dei gravi nei mezzi resistenti.</i> — 34. Equazione del moto verticale d'un grave che cade verticalmente in un mezzo resistente. — 35. Caso della gravità ritardatrice.	» 306 a 309
CAP. V. ^o <i>Del moto curvilineo.</i> — 37. Equazioni generali del moto curvilineo. — 38. Uso delle equazioni generali.	» 309 a 310
CAP. VI. ^o <i>Moto dei gravi proietti nel vuoto.</i> — 40. Equazioni del moto dei gravi proietti. — 41. Integrazione delle equazioni. — 43. Natura della curva dei gravi proietti. — 46. Ampiezza del getto. — 50. Equazione della invilupante. — 51. Si do-	

manda l'angolo del getto per colpire un punto dato. - 54. Relazione degli angoli sotto i quali con una velocità iniziale data si può colpire un dato scopo. - 55. Caso in cui i due angoli si riducono ad un solo. - 56. Angolo della più gran portata sopra un piano inclinato. - 57. Velocità del proietto in un punto qualunque. - 59. Durata del moto. - 60. Essendo data la posizione dello scopo e l'angolo del getto si trova la velocità iniziale. » 310 a 319

CAP. VII.° Gravi proietti nei mezzi resistenti. — 61. Considerazioni teoriche della resistenza dei fluidi. - 65. La traiettoria è piana. - 66. Trasformazione delle formole generali del moto in altre più comode. - 67. Equazioni particolari del moto dei proietti nei mezzi resistenti. - 68. Conseguenze che si deducono da queste equazioni, essendo qualunque la resistenza del mezzo. - 69. La traiettoria ha un assintoto verticale. - 70. Forza secondo la normale. - 71. Relazione generale tra la velocità u e l'angolo α . - 72. Osservazione. - 73. Ipotesi della forza resistente in ragione diretta del quadrato della velocità. » 319 a 336

CAP. VIII.° Moto di un punto materiale sopra una superficie e per una curva. — 75. Forza centripeta e centrifuga. - 76. Moto di un punto materiale sopra una data superficie. - 77. Formola della velocità - 78. Valore della pressione. - 79. Caso in cui il mobile non è sollecitato da forze. - 80. Caso in cui il mobile è animato dalla sola gravità. - 81. Moto d'un corpo per una curva a semplice curvatura. - 82. Pressione del mobile contro la curva. » 337 a 346

CAP. IX.° Delle forze centrali. — 85. La curva descritta dal mobile per la forza centrale è a semplice curvatura perchè giacente in un piano che passa pel centro attraente. - 86. Relazione fra le

aree descritte dai raggi vettori ed i tempi che impiegano a descriverle nelle forze centrali. - 87. Teoria delle forze centrali dedotta dalle leggi di Keplero. - 88. Conseguenza dedotta dalla seconda legge di Keplero. - 89. Riflessione sul risultamento antecedente. - 90. Conseguenza dedotta dalla terza legge di Keplero. - 91. Si risolve il problema inverso all'antecedente. - 89. Analisi dell'equazione antecedente. - 90. Spiegazione del doppio segno del secondo membro. - 91. Integrazione dell'equazione differenziale della traiettoria. » 337 a 357

CAP. X.° Moto dei punti pesanti sopra linee. - 92. Moto per la lunghezza di un piano inclinato. - 93. Oscillazione del pendolo. - 94. Caso in cui l'equazione del tempo del pendolo è integrabile in forma finita. - 95. Casi del risultamento. - 96. Caso utile alla pratica pel quale si può integrare l'equazione differenziale del tempo del pendolo. - 97. Discesa di un punto materiale pesante per la concavità di un arco cicloidale. - 98. La sola cicloide è curva tautocrona. - 101. Il tautocronismo della cicloide per qualunque arco, e del circolo per archi piccoli si può provare senza le integrazioni. - 102. La cicloide è la curva per la quale discendendo un grave impiega il minimo tempo. » 357 a 372

CAP. XI.° Moto dei sistemi. - 103. Principio di d'Alembert. - 104. Espressione delle forze del moto in equilibrio fra loro. - 105. Equazioni generali del moto dei sistemi ricavate dalle condizioni dell'equilibrio delle forze. - 106. Si considera l'equilibrio del moto progressivo delle forze applicate ed effettive. - 107. Moto del centro di gravità. - 108. Si considera il moto di rotazione fra le forze applicate ed effettive. 109. Caso in cui la somma dei momenti delle forze applicate è nulla. - 110. Proprietà geometrica ricavata dal moto del sistema. - 111. Equazioni delle forze vive. . . . » 372 a 383

CAP. XII.° Moto di rotazione di un sistema inva-

riabile intorno ad un asse. — 112. Equazione del moto rotatorio. — 113. Applicazione alla bilancia. — 114. Noto il momento d'inerzia rispetto un asse che passa pel centro di gravità, si trova il momento d'inerzia rispetto un altro asse qualunque parallelo al primo e di data distanza. — 115. Caso della rotazione d'un corpo pesante intorno all'asse. » 383 a 388

CAP. XIII.^o Determinazione del momento d'inerzia dei corpi di figura geometrica. » 389 a 393

APPENDICE. — 122. Espressione dell'attrazione di un corpo qualunque sopra un punto materiale. — 124. Applicazione all'attrazione della sfera. — 125. Trovare la curva tra tutte quelle dello stesso perimetro, che ha il centro di gravità più basso. — Esercizii. » 394 a 414



IMPRIMATUR

Fr. Hieronymos Gigli Ord. Pr. S. P. A. Mag.

IMPRIMATUR

Petrus De Villanova Castellacci Archiep. Petrae
Viscesgerens.



